La búsqueda del equilibrio en la teoría de juegos

# Nash

GENIOS de las MATEMÁTICAS

La búsqueda del equilibrio
en la teoría de juegos

# Nash

RBA

© 2017, Antonio Rufián Lizana por el texto
© 2017, RBA Coleccionables, S.A.

Realización: EDITEC
Diseño cubierta: Llorenç Martí
Diseño interior: Luz de la Mora
Infografías: Alberto Fregenal
Fotografías: Album: 31b, 71b, 95ad, 95b, 125, 141, 143; Archivo RBA: 33, 41, 73, 75, 99, 119, 126, 129, 151; Getty Images: 31a, 37, 69, 71ai, 71ad, 95ai, 117ai, 117ad, 117b, 149, 150; Shutterstock: 115.

Reservados todos los derechos. Ninguna parte de esta publicación puede ser reproducida, almacenada o transmitida por ningún medio sin permiso del editor

ISBN (Obra completa): 978-84-473-8775-5
ISBN: 978-84-473-9063-2
Depósito legal: B 17252-2017

Impreso y encuadernado en Cayfosa (Impresia Ibérica)

Impreso en España - *Printed in Spain*

# Sumario

**INTRODUCCIÓN** ..... 7

**CAPÍTULO 1** El extraño joven que revolucionó la teoría de juegos ..... 15

**CAPÍTULO 2** Dos avances matemáticos en medio de la incomprensión ..... 55

**CAPÍTULO 3** Nash resuelve el reto de la inmersión ..... 87

**CAPÍTULO 4** La obsesión por alcanzar la gloria matemática ..... 111

**CAPÍTULO 5** Locura, cordura y reivindicación: el triunfo final de Nash ..... 131

**LECTURAS RECOMENDADAS** ..... 153

**ÍNDICE** ..... 155

# Introducción

John Forbes Nash es uno de los matemáticos más populares de la historia. De hecho, su nombre y ciertos pasajes de su vida son conocidos por muchas personas que ni siquiera tienen interés en las matemáticas, o que bien solo podrían explicar de forma superficial de qué tratan sus aportaciones científicas. Sin embargo, la mayoría podrían responder que Nash es el «genio loco» que sale en la película *Una mente maravillosa*, protagonizada por el actor neozelandés Russell Crowe. Tal es el impacto universal del cine, que en ocasiones, pese a las evidentes licencias que se toma respecto a la realidad y a los errores e incluso mentiras flagrantes en los que suele incurrir, tiene el poder de despertar un inusitado interés por temas y personajes a los que, de otra manera, tan solo prestaría atención un círculo muy reducido de personas. En este caso, todas aquellas que ya sabían que Nash se reveló como un cerebro privilegiado de la matemática y que pertenece, por derecho propio, al olimpo de los grandes matemáticos del siglo xx.

*Una mente maravillosa* no solo constituyó un éxito de taquilla, sino que también cosechó numerosos premios y fue distinguida como la mejor obra cinematográfica del año 2001. No obstante, lo más meritorio del filme es que supo acercar de forma amena al gran público la vida y obra de un tipo de «héroe» al que, francamente, no está acostumbrado: un matemático. Lejos de desdeñar la propuesta, los espectadores sintieron curiosidad por la geniali-

dad y las tempranas aportaciones de Nash, al que se retrata como una persona complicada, excéntrica y de difícil trato. Tampoco les costó conmoverse con su hundimiento personal y profesional a consecuencia de una enfermedad mental devastadora que, con solo treinta años de edad, lo incapacitó para desarrollar su trabajo y lo sumergió en décadas de oscuridad. A partir de ahí, se asiste a los períodos intermitentes en los que Nash se enfrenta, sucumbe y se levanta contra una psicopatía que suele considerarse incurable, hasta finalmente recuperar la cordura. A modo de colofón, Nash obtiene el reconocimiento mundial a los sesenta y seis años de edad mediante la concesión de un galardón que todos, salvo precisamente los matemáticos, conciben como el más prestigioso que existe: el premio Nobel.

Hasta aquí, los hechos plasmados en *Una mente maravillosa* se ajustaron, en líneas generales, al periplo vital de este singular matemático estadounidense. No obstante, la historia obedeció al gusto mayoritario de Hollywood y, en consecuencia, se optó por un final feliz; a diferencia de la vida real de Nash, como se verá a lo largo de este libro.

Lo cierto es que trazar una biografía sobre Nash y sus aportaciones matemáticas, más allá de las que realizó a la teoría de juegos y los procesos de negociación y por las que recibió en 1994 el premio Nobel de Economía —que no de Matemáticas—, supone un reto considerable, dado que su talla humana y científica supera con creces cualquier creación que pretenda encerrar su vida y obra. Como muestra de su inabarcable personalidad, cabe citar que Nash vio *Una mente maravillosa* en un pase privado junto al director del filme y se limitó a comentar que le había gustado por tres razones: porque no era aburrida, ya que se declaró partidario de las películas de acción con montajes muy rápidos; porque tenía sentido del humor, del que él hacía gala, y porque el protagonista, el galán Russell Crowe, se le parecía físicamente. El director se sonrió de esta última afirmación hasta que, tiempo más tarde, se le acercó un grupo de matemáticos veteranos que acababan de ver la película y habían conocido a Nash cuando era joven: todos coincidieron en que, efectivamente, se parecía mucho a Russell Crowe.



En cualquier caso, esta biografía se aleja de los estereotipos, busca el rigor y pretende explicar de forma clara las grandes contribuciones de Nash al universo matemático. La narración arranca con la infancia, la juventud y los primeros pasos matemáticos de Nash, para después detenerse en sus progresos académicos en el seno de la Universidad de Princeton y, sobre todo, incidir en sus aportaciones a la teoría de juegos y los procesos de negociación —cuyas aplicaciones mercantiles propiciaron, por ejemplo, la denominada «mayor subasta de la historia», sobre la que se hablará más adelante—. Todo ello permitió modelizar matemáticamente las situaciones de conflicto —solución óptima del juego y solución de equilibrio— y facilitar la toma de decisiones, lo que fue trasladado con una repercusión considerable al marco de la economía y el comportamiento de los mercados. También dio pie al famoso «dilema del prisionero», que se explicará con detalle.

Posteriormente, se abordará la colaboración de Nash con la corporación RAND, financiada por las Fuerzas Armadas estadounidenses en el contexto de una Guerra Fría donde las estrategias y el buen uso de los recursos resultaban esenciales; al efecto, los matemáticos crearon una nueva rama llamada «investigación operativa». Si bien los avances en la teoría de juegos suscitaron un gran interés en la corporación, Nash se decantó por el estudio de las variedades de Riemann y sus relaciones con la variedades algebraicas. Al cabo, fue expulsado de la RAND y poco después conoció a la estudiante salvadoreña Alicia Lardé López-Harrison, con la que se casaría.

A continuación, se ahondará en la trayectoria profesional de Nash, que dio un giro al aceptar una oferta del Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT). Su trabajo en este centro académico se vio seriamente afectado por diversos problemas personales, entre los que se cuenta que soslayara su paternidad y se desentendiera de su hijo. En cuanto al terreno matemático, decidió enfrentarse solo a aquellos desafíos que le granjearan fama y reconocimiento y no admitiesen dudas sobre su dificultad. Aunque consiguió demostrar una de las conjeturas de Riemann sobre la inmersión de variedades en espacios euclídeos, lo que más sorprendió a la comunidad matemática fue su manera de llegar a la

solución: resolviendo sistemas de ecuaciones diferenciales con los que no estaba familiarizado. El resultado se conoce como el teorema de Nash-Moser.

Cualquier biografía completa sobre Nash debe reservar un espacio para el desolador capítulo de su enfermedad, caracterizada por brotes de locura, delirios paranoicos —en los que se sintió acechado por los extraterrestres, los comunistas e incluso por el Papa— y durísimos tratamientos psiquiátricos. No obstante, aquí se describirán de forma somera, para hacer hincapié en aspectos puramente matemáticos: por ejemplo, cómo abordó y resolvió el problema de la regularidad en ecuaciones diferenciales parabólicas. La casualidad quiso que compartiera el mérito con el matemático italiano Ennio de Giorgi (1928-1996) y el teorema resultante tomara el nombre de ambos. Después de este éxito, Nash quiso escalar el Everest de la matemáticas puras: la hipótesis de Riemann. Probablemente, su inestabilidad emocional acusó estas tensiones y, para conmoción de todos, cayó preso de la enfermedad y atravesó sus años más oscuros.

El libro concluirá con la recuperación en la década de 1990 de los trabajos científicos de Nash, especialmente la teoría de juegos, por parte de las más prestigiosas revistas de economía. Estas referencias renovaron el interés por su figura y le valieron un reconocimiento tan tardío como merecido, aumentado por el éxito de *Una mente maravillosa*. No obstante, la tesis de esta biografía es que tanto el premio Nobel como la película desvirtuaron la trascendencia de su obra: para remediarlo, se insistirá en las aportaciones de Nash y sus claves fundamentales, y también se resaltará la fuerza y vigencia de su legado.

Como anticipo, conviene precisar que si bien la fama de Nash proviene principalmente de sus aportaciones a la teoría de juegos, en realidad se interesó por muchas otras ramas de las matemáticas. En el contexto de una ciencia cada vez más especializada y donde la mayoría de los investigadores se consagraban a trabajar en aspectos muy concretos de dichas ramas, Nash remó a contracorriente y dedicó su capacidad intelectual a campos muy diversos, algunos desconectados entre sí. De hecho, hizo aportaciones muy meritorias en geometría, álgebra, topología y ecuaciones diferenciales. Sin duda, esta diversidad solamente está al alcance de unas pocas mentes privilegiadas.



En otros órdenes, puede aducirse que la obra de Nash no fue extensa, dado el escaso número de publicaciones que efectuó. No obstante, el lector comprobará la enorme calidad y originalidad de sus ideas y cómo el propio método de trabajo de Nash fomentó que sus conclusiones tuvieran un sello personal. En este sentido, siempre estuvo preocupado por mantener su independencia y nunca se adscribió a ninguna escuela o grupo de investigación. Así, cuando un tema le ocupaba, reflexionaba sobre él antes de conocer todo lo que se había avanzado en esa cuestión. ¿Por qué? Para evitar caer en la tentación de buscar las respuestas en los caminos que ya habían recorrido otros matemáticos. En consecuencia, quería que sus soluciones fueran originales e imaginativas, aunque esta táctica, lógicamente, le produjo alguna vez un disgusto; máxime, cuando llegaba a conclusiones que ya eran conocidas por los demás y él ignoraba.

En cambio, uno de los hitos de la trayectoria de Nash que no admite discusión es que trabajó con los mejores matemáticos de su tiempo en la Universidad de Princeton, donde se desempeñaron científicos de la talla de Einstein, Oppenheimer y Von Neumann. Fue allí donde Nash descolló con sus primeros hallazgos, que más tarde desembocarían en una cierta «anomalía» histórica: que un matemático recibiera un premio Nobel de Economía por las aplicaciones económicas que se derivaron de sus aportaciones, sin que se distinguiera siquiera su trabajo general como matemático. En este sentido, debe subrayarse que las aportaciones de Nash a la teoría de juegos no se hallan entre las más importantes de su carrera científica. Al respecto, el matemático estadounidense John Milnor, colega suyo de Princeton, puntualizó que fueron «una aplicación ingeniosa, pero no sorprendente, de métodos conocidos, mientras que su posterior trabajo matemático es mucho más importante». Paradójicamente, Nash había realizado un solo curso de economía en toda su vida, con motivo de un breve trabajo publicado varias décadas antes.

No menos paradójico resulta que Nash nunca ganase el premio que más anheló en su vida: la medalla Fields. Como se explicará a

lo largo de estas páginas, su juventud, primero, y la psicopatía sobrevenida, después, se aliaron en su contra. A pesar de esta laguna, la comunidad de matemáticos reconocería décadas más tarde la trayectoria científica de Nash, que recibió el premio de Teoría John Von Neumann (1978), el premio Leroy P. Steele de la Sociedad Americana de Matemáticas (1999) y, sobre todo, el premio Abel (2015), que para los matemáticos equivale al premio Nobel.

Por último, cabe señalar que la película *Una mente maravillosa* brinda un margen para reflexionar sobre cómo habría sido la vida de Nash si la enfermedad no se hubiera cruzado en su trayectoria. ¿Qué grandes descubrimientos matemáticos se perdieron por ello? Ante la certeza de que esta incógnita nunca podrá despejarse, quizás el verdadero valor del filme sea otro, más sutil: incitar a las mentes despiertas a profundizar en la vida y obra de Nash. En este sentido, la ventaja del lector frente al espectador no es solo comprobar qué es cierto y qué es mera invención, sino también dar muchos pasos más allá: conocer a fondo cuáles fueron sus contribuciones, descubrir algunos aspectos y trabajos de los que no se suele hablar y, en definitiva, saberlo todo del hombre y del matemático, desde sus anécdotas y frases más llamativas hasta sus primeras demostraciones y sus logros científicos más elaborados. Este, y no otro, es el propósito de la presente biografía.



**1928** Nace John Forbes Nash en Bluefield, Virginia Occidental, primer hijo del matrimonio formado por John Forbes Nash y Margaret Virginia Martin.

**1945** Publica su primer artículo científico, de forma conjunta con su padre, en *Electrical Engineering*. Gana la beca George Westinghouse y entra en el Instituto Tecnológico Carnegie para estudiar ingeniería.

**1946** Decide dedicarse por completo a las matemáticas.

**1948** Gana una beca y se integra en el grupo de doctorandos de la Universidad de Princeton.

**1950** Presenta su tesis sobre juegos no cooperativos, dirigida por Albert Tucker. Publica «El problema de la negociación». Entra como colaborador en la RAND.

**1951** Acepta ser profesor en el Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT).

**1953** Nace su primer hijo, John David Stier, fruto de su relación con Eleanor Stier.

**1954** Publica sus teoremas sobre variedades. Recibe un duro golpe moral al ser expulsado con deshonor de la RAND.

**1956** Regresa a la Universidad de Princeton.

**1957** Contrae matrimonio con Alicia Lardé, antigua alumna suya.

**1958** Publica los teoremas de regularidad sobre ecuaciones diferenciales parabólicas. Decide abordar la hipótesis de Riemann. Manifiesta síntomas de agotamiento mental.

**1959** Ingresa en el sanatorio psiquiátrico McLean, donde se le diagnostica esquizofrenia paranoide. Nace John Charles Martin Nash, su segundo hijo. Logra ser dado de alta y pide asilo político en Europa, en vano.

**1961** Ingresa en el sanatorio mental de Trenton, donde es sometido a tratamientos de insulina.

**1962** Publica su artículo sobre las ecuaciones de Navier-Stokes. Viaja unos meses a Francia. Divorcio.

**1978** Recibe el premio de Teoría John Von Neumann de Investigación Operativa.

**1994** Gana el premio Nobel de Economía.

**1995** Publica su último artículo científico sobre singularidades.

**1996** Habla de su enfermedad en el X Congreso Mundial de Psiquiatría.

**1999** Recibe el premio Leroy Steele de la Sociedad Americana de Matemáticas.

**2001** Vuelve a casarse con Alicia Lardé.

**2015** Recibe el premio Abel. Muere a la edad de ochenta y seis años.

CAPÍTULO 1

# El extraño joven que revolucionó la teoría de juegos

Nash siempre fue distinto. De carácter introvertido, se enamoró de las matemáticas y se distinguió por buscar las soluciones, incluso a los problemas más difíciles, a su manera. Su talento le condujo al Instituto Tecnológico Carnegie, donde realizó su primera gran demostración, y después a la Universidad de Princeton. Allí, además de ganarse fama de arrogante, asombró al mundo con su tesis sobre los juegos no cooperativos.

Probablemente, John Forbes Nash ejemplifica como pocos la eterna batalla entre el orden matemático y el caos vital, que en ocasiones se traslada de forma cruel a la existencia de un hombre, de alguien que vuelca su pasión en lo primero y sucumbe ante lo segundo. También encarnó, a su pesar, la fina línea que separa el genio de la locura, un abismo al que se precipitó en plena juventud, víctima de sus propias circunstancias y pensamientos, y contra el que se alzó y triunfó para ser recordado como lo que realmente fue: un matemático excepcional. En aras del orden, lo mejor será remontarse al principio, al día 13 de junio de 1928, cuando John Forbes Nash vino al mundo en la ciudad estadounidense de Bluefield, un próspero nudo de comunicaciones en el estado de Virginia Occidental donde, al calor de la prosperidad, comenzó a brotar el interés por la cultura y, en particular, por la ciencia.

En aquella jornada feliz nada hacía presagiar el tormentoso destino que aguardaba al primogénito de los Nash, un matrimonio formado casi cuatro años antes por el ingeniero eléctrico John Forbes Nash, quien dio al recién nacido su mismo nombre, y la profesora Margaret Virginia Martin, a la que todos llamaban Virginia. Como tantos otros, los Nash eran una familia de clase media acomodada y de carácter conservador y religioso. Su felicidad se tornó completa al cabo de dos años y medio del nacimiento de John, cuando la madre dio a luz a Martha, su querida hermana.

Esta, más adelante, se referiría en estos términos a la singularidad de John: «Era siempre diferente. Mis padres sabían que era diferente y también sabían que era brillante. Él siempre quería hacer las cosas a su manera. Mamá insistía en que yo le ayudase, que lo introdujera entre mis amistades… pero a mí no me entusiasmaba lucir a un hermano raro».

## UNOS PADRES MUY DISTINTOS ENTRE SÍ

Precisamente, los antecedentes familiares pueden aportar algunas pistas sobre la vida y obra de Nash, sobre todo en lo que se refiere a su carácter, inquietudes y formación. Así, su familia paterna procedía del ámbito rural de Texas y poseía firmes convicciones religiosas. A pesar de ello, el abuelo se reveló como un individuo inestable y mujeriego, al extremo de que abandonó a su esposa y tres hijos cuando estos eran muy pequeños. Condenados a pasar serios apuros económicos, salieron adelante gracias al esfuerzo de la madre, que trabajó muchos años como administradora del colegio Baylor, una institución baptista. Lo que ella no pudo conseguir, aun siendo una mujer inteligente y llena de recursos, es que sus pequeños tuvieran una infancia feliz: en aquella sociedad tejana de principios del siglo XX, como en tantas otras sociedades, incluso en tiempos posteriores, crecer en un hogar sin padre constituía una auténtica mancha y motivo de vergüenza. Estas circunstancias hicieron de John Forbes Nash padre una persona retraída y con dificultades para expresar sus sentimientos, condición que también caracterizaría a su primogénito.

Por lo demás, John Forbes Nash padre demostró buenas aptitudes para el estudio científico y se matriculó en una escuela preparatoria del ejército, institución que permitía cursar estudios superiores a los niños de familias desfavorecidas. Después, se licenció en Ingeniería eléctrica y comenzó a trabajar en la General Electric, hasta que se alistó durante la Segunda Guerra Mundial para servir en Francia; a su regreso, impartió clases de ingeniería y, finalmente, aceptó la propuesta de una empresa pública eléctrica con sede en Bluefield. Allí conoció a la que sería su esposa y madre de sus hijos: Virginia, que procedía igualmente de una familia acomodada y religiosa.

Antes de casarse, Virginia, hija de un médico de Carolina del Norte, tuvo la oportunidad de realizar estudios superiores y destacó por su facilidad para aprender lenguas. Pronto decidió encaminar su vida profesional hacia la enseñanza, actividad que ejerció hasta contraer matrimonio: una ley local prohibía impartir clases a las mujeres casadas y limitaba sus quehaceres a las tareas del hogar. Como contrapartida a esta injusticia, favoreció la instrucción del pequeño John; además, siempre estuvo atenta a sus necesidades y le ayudó a integrarle en el entorno en que vivían.

La familia Nash atravesó la crisis económica de la década de 1930 sin demasiadas penurias gracias a su austeridad en el gasto y los ingresos regulares del padre. Con el tiempo, pasaron a ser propietarios de una vivienda ubicada en una buena zona de la ciudad. Lo cierto es que se trataba de un matrimonio bien avenido pese a que los caracteres de ambos esposos no podían ser más diferentes: ella se desenvolvía como una mujer abierta, activa y sociable; él se mostraba mucho más reservado. En este sentido, debe señalarse que la extraña personalidad del pequeño John no se debió a la falta de cariño familiar, ni a las prolongadas ausencias del padre por culpa de los viajes que exigía su trabajo de inspector; muy al contrario, este siempre le trató con gran afecto y disfrutaba los períodos de tiempo que pasaban juntos, en los que satisfacía la incesante curiosidad del pequeño sobre temas científicos.

## EL EXPLOSIVO FINAL DE UNA NIÑEZ SOLITARIA

John nació en el sanatorio de Bluefield y fue bautizado en el seno de la Iglesia episcopaliana, que sigue el rito anglicano. Todos los testimonios concuerdan en que se trataba de un niño tímido y solitario al que le costaba relacionarse con los demás. Esta falta de empatía resultó una constante en su vida y le granjeó ser etiquetado como una persona de difícil trato. Aleccionado por su madre, el

pequeño John aprendió a leer a los cuatro años y se volcó en los libros, que le apasionaban. Según la nota autobiográfica que escribiría con motivo del premio Nobel, su lectura predilecta fue la enciclopedia que le regalaron sus padres, aunque también hizo referencia a la biblioteca familiar: «En nuestra casa y la de los abuelos también había otros libros que tuvieron valor educativo para mí».

«Mis padres me proporcionaron una enciclopedia, la *Compton's Pictured Encyclopedia*, de cuya lectura aprendí mucho de niño.»

— JOHN FORBES NASH.

Pese a tener el talento de un superdotado, John no supo sacar partido a esta ventaja en los primeros años de escuela y su balance fue desastroso: obtuvo malas notas, demostró una gran aversión a cualquier forma de disciplina y se mostró distraído y distante, más preocupado por sus pensamientos que de lo que se enseñaba en clase. Además, no cogía el lápiz de forma correcta y su letra era casi ilegible, lo que obligó a su madre a inscribirlo en cursos de caligrafía. Afortunadamente, Virginia, con formación de maestra, suplió en casa los fallos que se derivaban de la mala actitud en la escuela elemental; no en vano, había conseguido que lo admitieran en ella con seis meses de antelación.

John no solía jugar con otros niños. Este retraimiento, sin duda, contribuyó a consolidar su carácter orgulloso y un punto arrogante. Aunque solo era un chiquillo, percibía los juegos infantiles como una distracción de sus verdaderos intereses, que pasaban por la lectura y por realizar sus primeros experimentos científicos. En esta línea se decantó por las pruebas relacionadas con la electricidad y las comunicaciones, lo que evidenció la influencia de los estudios y conocimientos de su padre.

En cualquier caso, los Nash siempre supieron que su hijo era peculiar y, dentro de sus posibilidades, quisieron corregir su retraimiento. Al efecto, lo inscribieron como escolta en los *boy scouts*, lo apuntaron a sesiones de estudio de la Biblia y le animaron a encontrar un trabajo para el verano, que finalmente desempeñó en el *Bluefield Daily Telegraph*. La intención era dificultarle que pasara tanto tiempo en completa soledad, absorto en sus experimentos y lecturas.



John cumplió los deseos de sus padres, pero no hizo esfuerzo alguno por mejorar su sociabilidad y consideró toda actividad que lo alejara de sus gustos como una tediosa pérdida de tiempo. De hecho, las únicas amistades que trabó en esa época tuvieron que ver con sus experimentos científicos, y no acabaron nada bien. Así, construyó un rudimentario laboratorio en el sótano de su casa donde pasó muchas horas junto a sus amigos Herman Kirschner y Donald Reynolds realizando toda clase de pruebas y ensayos, algunos tan arriesgados como la fabricación de explosivos. Un día aciago, Kirschner murió al explosionar uno de los artefactos que manipulaba. A raíz del suceso, los padres de Reynolds lo matricularon en una academia militar para alejarlo de John. Este quedó consternado por la tragedia y, de nuevo, completamente solo.

## LA LLAMADA DE LAS MATEMÁTICAS

John no fue un niño prodigio. Sus calificaciones escolares distaron mucho de la excelencia y lo cierto es que tardó bastante en revelar sus prodigiosas cualidades matemáticas. En su semblanza autobiográfica reconoció que nunca fue el mejor alumno de su clase, ni en matemáticas, ni en ninguna otra disciplina; al principio, incluso le consideraron incapaz de aprender las habilidades matemáticas más elementales. Sin embargo, la realidad era bien distinta: lo que ocurría es que ideaba sus propios métodos para resolver los problemas. Esto explica que en ocasiones se atreviera a corregir las demostraciones matemáticas realizadas por algunos de sus profesores para buscar una forma más rápida y elegante de llegar a los mismos resultados.

Por descontado, esta actitud desconcertó y contrarió a sus maestros, que no siempre entendieron su peculiar método de abordar los problemas, y tampoco ayudó a que sus notas fueran altas. En todo caso, este sería uno de los rasgos definitorios de su traba-

jo científico en el futuro: la búsqueda de un camino propio frente a las matemáticas.

Las fuentes bibliográficas coinciden en señalar que John recibió la primera llamada de las matemáticas a partir de la lectura de *Los grandes matemáticos* (1937), un libro del escritor y matemático escocés Eric Temple Bell (1883-1960) donde se desgranaban las vidas de los representantes más ilustres en la materia. El propio John aludió a la fuerte impresión que le causó el libro y su deseo de imitar a los hombres que desfilaban por sus páginas.

## EL PEQUEÑO TEOREMA DE FERMAT

Entre los matemáticos mencionados en el libro hubo uno que le llamó la atención por encima de los demás: el francés Pierre de Fermat (1601-1665). John se sintió atraído de inmediato por todo lo relativo a su teoría de números, que investiga las relaciones entre los números y sus propiedades; y en particular, por lo que se conoce como el pequeño teorema de Fermat, que está relacionado con la divisibilidad y cuyo enunciado es el siguiente:

Si $p$ es un número primo, entonces, para cada número natural $n$, con $n>0$, $n^p \equiv n \pmod{p}$.

En el teorema está involucrada una expresión matemática que hace referencia a las congruencias. Dados dos números enteros $a$ y $b$, si su diferencia ($a-b$ o $b-a$) es exactamente divisible por el número $m$, se dice que $a$ y $b$ son congruentes respecto al módulo $m$, y se simboliza esto escribiendo $a \equiv b \pmod{m}$. Así,

$$56 \equiv 6 \pmod{5} \text{ y } 47 \equiv 14 \pmod{11}.$$

La idea de las congruencias surge del mismo principio de los relojes convencionales y de hecho también son conocidas como calculadoras de reloj. Si un reloj analógico convencional marca las 9 y pasan 4 horas, las manecillas se colocarán en la 1. Por así decirlo, $13 \equiv 1 \pmod{12}$. Pues bien, el pequeño teorema de Fermat dice que si se elige un número natural $n$ y se multiplica por sí mismo un número primo de veces $p$, el resultado de la operación



es congruente con $n$ módulo $p$. O sea, $n^p - n$ es un múltiplo exacto de $p$. Por ejemplo, se escoge $n=6$ y $p=3$. Entonces, $6^3=216$, y si se le resta $n=6$ queda 210, que es divisible por 3, el primo escogido.

La demostración del resultado no se hace probando todas las posibilidades, que son infinitas y con números enormes a poco que se escojan $n$ y $p$ suficientemente grandes. Las matemáticas exigen una prueba que valide el resultado mediante argumentos matemáticos. En este sentido, la primera demostración publicada fue el artículo «Theorematum quorundam ad numeros primos spectantium demonstratio» (1736) —Una prueba de ciertos teoremas sobre números primos—, del físico y matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783). Hubo dos demostraciones posteriores: la primera, en un manuscrito inédito datado hacia 1683 del matemático alemán Gottfried Leibniz (1646-1716); la segunda, *Disquisitiones arithmeticae* (1801) —*Disquisiciones de aritmética*—, del matemático alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

Nash logró sumar una nueva demostración a este resultado, lo que evidenció su gran talento matemático. Así lo incluyó en su nota biográfica, como un hallazgo dentro de sus aportaciones científicas, sin importarle que fuera eclipsado por su trayectoria posterior. En dicha nota también habló de su pasión por los números y se jactó de su capacidad para la aritmética: «Me encontré manejando cifras mucho más largas que el resto de estudiantes. Podía operar con numerosos dígitos, y ellos apenas con dos o tres». Si bien no existe una relación clara entre la investigación matemática y la capacidad de realizar operaciones aritméticas complejas con rapidez, es cierto que se trata de una habilidad muy desarrollada entre los grandes matemáticos y suele ser un camino para llegar a las matemáticas superiores.

## EL INSTITUTO TECNOLÓGICO CARNEGIE

En cualquier caso, el joven John todavía no había decidido su futuro y parecía inclinado a seguir la carrera de su padre como ingeniero eléctrico; este, en cambio, le propuso entrar en la academia militar de West Point, en un intento claro de que la milicia recon-

dujera su carácter. La idea no prosperó ante la oposición de la madre. John persistió entonces en la idea de ser científico y, de forma conjunta con su padre, realizó su primer trabajo: un estudio que permitía calcular las tensiones adecuadas de los cables eléctricos. El artículo fue publicado en 1945 por la revista *Electrical Engineering*, que hoy en día continúa su andadura bajo la prestigiosa editorial científica *Springer*.

Animado por esta satisfacción, participó en el concurso George Westinghouse para escuelas de ingeniería, dotado con diez becas de estudios para los ganadores en todo el país. Y la consiguió. Este éxito le permitió entrar en la Universidad Carnegie Mellon, emplazada en Pittsburg y fundada en 1900 por el magnate británico Andrew Carnegie. A partir de entonces, cursó sus estudios en el Instituto Tecnológico Carnegie —o Carnegie Tech—, donde comenzó a ser llamado por su nombre completo, John Forbes Nash, o simplemente Nash.

Si bien Pittsburg era una ciudad industrial aquejada por la contaminación de las fábricas, el joven Nash fue afortunado en otros sentidos, ya que aquel centro académico comenzaba a cimentarse como una institución de prestigio. Su primera opción para los estudios superiores fue la ingeniería química, pero esta vocación se truncó de inmediato: tenía problemas para mantener la disciplina en los laboratorios. De forma paralela fue tentado por el Departamento de Matemáticas, que era muy potente y atraía a los mejores alumnos. Lo cierto es que la fama de aquel departamento estaba plenamente justificada. Su director, John Lighton Synge (1897-1995), un matemático irlandés emigrado en 1930 a Estados Unidos, ya había ejercido como profesor visitante en la Universidad de Princeton, que congregó a algunos de los mejores matemáticos de la época y en la que terminaría el propio Nash.

Otros miembros destacados del departamento fueron Richard Duffin (1909-1996), profesor, mentor y admirador de Nash, que le escribió una de las cartas de recomendación más efectivas de la historia; Raoul Bott (1923-2005), un físico de origen húngaro que paradójicamente obtuvo sus mayores logros y el reconocimiento internacional en el campo de la geometría, y otro refugiado europeo, el ruso Alexander Weinstein (1897-1979), que desarrolló su



trabajo matemático en ecuaciones diferenciales, campo en el que también sobresalió Nash. En 1945, el nivel del departamento era tan alto que intimidó incluso a un célebre profesor y matemático, Albert Tucker (1905-1995), que llegó ese año para dar clases y tuvo que esforzarse para aportar novedades con su investigación; y eso que Tucker, de nacionalidad estadounidense y origen canadiense, no solo fue y sigue siendo uno de los matemáticos más conocidos del mundo, sino que sus condiciones de optimalidad para problemas no lineales, redactadas de forma conjunta con el matemático estadounidense Harold Kuhn (1925-2014), resultan de obligado estudio para cualquiera que emprenda una carrera científica. Más tarde, Nash se encontraría con Tucker y Kuhn en la Universidad de Princeton; de hecho, Tucker sería el director de su tesis, y junto a Kuhn ejerció una influencia fundamental en su carrera.

## GRANDES ELOGIOS Y UNA FRUSTRACIÓN ÍNTIMA

Desde el principio, Nash causó asombro en el Instituto Tecnológico por su facilidad para encontrar soluciones imaginativas a los problemas que se le planteaban y por el descaro que mostraba al abordar los más difíciles. Dado su potencial, Synge, secundado por el resto de profesores, le recomendó que se centrara en los cursos de matemáticas, donde se estimaba que podía desarrollar todo su talento. Estas sugerencias fueron atendidas por Nash en 1946, en su segundo año en el Instituto, cuando se consagró casi exclusivamente a las matemáticas para disgusto de los administradores de su beca, que preferían cualquier tipo de ingeniería.

Nash, como la mayoría de los estudiantes becados, se alojaba en la residencia Welch, dentro del campus. Aunque se sentía en su elemento en el grupo de estudiantes de matemáticas, fuera de este círculo continuó siendo poco sociable, nada popular y objeto de bromas y desprecios. Su retraimiento corrió parejo a sus éxitos como matemático, lo que le empezó a granjear fama de genio solitario entre los alumnos y el profesorado. Motivado por sus logros iniciales, se decidió a participar en el concurso matemático William Lowell Putnam para estudiantes no licenciados, cuyo presti-

gio crecería con los años hasta convertirse en un referente actual para los programas de detección de jóvenes con talento para las matemáticas. Sin embargo, Nash no quedó siquiera entre los cinco primeros. Muchas décadas más tarde, admitió en su nota autobiográfica la enorme frustración que le acarreó este fracaso. En esa misma nota reveló algo mucho más positivo: que aquel resquemor le estimuló para ser mejor matemático y no perder la gran confianza que tenía en sí mismo.

En cuanto a sus actividades diarias en la universidad, Nash siempre prestó una especial atención a las clases del profesor Richard Duffin, conocido en el medio académico por sus despistes y por quedarse parado en más de una ocasión en medio de una demostración sin saber cómo continuar. En esos momentos de apuro, Duffin recurría sistemáticamente a Nash, que lo sacaba del entuerto con elegancia. No en vano, Nash entendía con profundidad los problemas que se estudiaban y era capaz de buscar ejemplos y contraejemplos muy ilustrativos. En matemáticas se usan los contraejemplos para demostrar que algo no es cierto. Si para una conjetura matemática se encuentra un contraejemplo, ya se sabe que no es cierta. A menudo, conviene buscar un contraejemplo antes de abordar la demostración de un resultado matemático difícil; esto ahorra perder el tiempo intentando algo imposible.

De este modo transcurrieron los años en el Carnegie, donde Nash, antes de terminar sus estudios, completó el único curso de economía de su vida; lo cual no deja de resultar paradójico en alguien que ganaría el premio Nobel en dicha disciplina. Aún no se había licenciado y ya acumulaba ofertas de las principales universidades del país para integrarse en los departamentos de matemáticas. Entre ellas destacaban las de Harvard y Princeton, que requerían en sus solicitudes de admisión que se adjuntaran cartas de recomendación de los profesores. La más conocida de dichas cartas fue, precisamente, la del profesor Richard Duffin, que en apenas cuatro líneas le dedicó sinceros elogios y una sentencia que parecía exagerada, pero se demostró cierta: «Es un genio matemático». Por su parte, el director del departamento, Synge, escribió con orgullo que «lo colocaría entre lo mejor que he tenido, y posiblemente el mejor».



## EL ACIERTO DE LA UNIVERSIDAD DE PRINCETON

Nash se decantó por la Universidad de Princeton, que no solo le ofreció una beca con una dotación económica más que suficiente para sus gastos, sino también una habitación en la residencia de

### ECUACIONES DIOFÁNTICAS

Nash sintió atracción durante sus estudios en el Carnegie Tech por las ecuaciones diofánticas, aquellas que han de ser de tipo polinómico, involucran más de una variable y tienen soluciones enteras. Una ecuación diofántica sencilla es $x+y=7$, que tiene infinitas soluciones en los números enteros, como los pares (2,5), (3,4) o (14,–7). En general, existen algunas restricciones que limitan el número de soluciones posibles. Por ejemplo, si se plantea:

$$x+y=7$$
$$\text{sujeto a } x,y\geq 2$$
$$x,y\in Z$$

donde $Z$ es el conjunto de números enteros, que incluye a los positivos y negativos, las soluciones se reducen entonces a los pares (2,5) y (3,4). El (4,3) se puede considerar el mismo par que el (3,4). Una de las ecuaciones diofánticas más comunes es la llamada pitagórica:

$$x^2+y^2=z^2$$
$$\text{sujeto a } x,y,z\in Z$$

Se trata de encontrar todos los triángulos rectángulos cuyos lados sean números enteros, como en el caso (3,4,5). Curiosamente una variación de esta ecuación ha dado lugar a uno de los resultados matemáticos más famosos, el último Teorema de Fermat, que afirma que la ecuación diofántica

$$x^n+y^n=z^n$$
$$\text{sujeto a } x,y,z\in Z$$

no tiene solución cuando $n\geq 3$. Si bien este problema en concreto fue resuelto en 1995 por el matemático británico Andrew John Wiles, debe destacarse que no existe un método general de solución para las ecuaciones diofánticas. Esta conclusión fue firmemente demostrada en 1970, mediante la resolución de uno de los problemas de la famosa lista de David Hilbert.

doctorandos. Duffin y Synge estaban convencidos de que Nash encajaría mejor allí, donde la especialidad eran las matemáticas puras, no necesariamente aplicadas; esto casaba mejor con las aptitudes e intereses de su alumno. Además, Princeton estaba más cerca de Bluefield, donde residía su familia.

La elección fue un acierto: a pesar del prestigio de Harvard, el Departamento de Matemáticas de Princeton lo superaba desde la década de 1930. Ello se debió, en gran parte, a sus esfuerzos por captar a los mejores profesores posibles, pero también por elegir cuidadosamente a sus alumnos de doctorado; de hecho, solo aceptaba diez al año, mientras que el cupo de Harvard se elevaba a veinticinco. La fama y la leyenda de las que Princeton goza hoy en día arrancaron precisamente en dicha década, cuando contó entre sus filas con varios matemáticos de valía indiscutible y, sobre todo, con su habitante más célebre, Albert Einstein (1879-1955), que trabajaba en el Instituto de Estudios Avanzados. Así, durante esa década y las siguientes, la Universidad de Princeton resultaba para un físico o un matemático profesional lo más parecido a estar en el edén científico; y para orgullo de Nash, su departamento más prestigioso, el de matemáticas, deseaba incorporarle.

Nash llegó en otoño de 1948 a la ciudad de Princeton, que a grandes rasgos puede definirse como una localidad pequeña, tranquila y muy orgullosa de su universidad. Dentro del campus admiró el edificio Fine, una construcción de color rojo y estilo gótico que alojaba el Departamento de Matemáticas. Su biblioteca, que podía competir por ser la más completa del mundo, estaba abierta las veinticuatro horas del día por una razón fascinante: no malograr ninguna idea por culpa de la hora en que hubiese sido concebida. A principios de siglo, Estados Unidos había sido un país atrasado en lo que a las matemáticas puras se refiere, especialmente si se señala que ni siquiera existía una cátedra de esta materia y más aún si se compara con el nivel de Europa, donde dicha disciplina gozaba de gran prestigio y larga tradición en París, Roma, Viena y Budapest, por poner solo unos ejemplos. En particular, la ciudad alemana de Gotinga era considerada el centro de la matemática mundial, máxime tras haber tenido a Gauss entre sus profesores. Además, David Hilbert (1862-1943) obtuvo allí su cátedra



antes de acometer su tarea más titánica: regular las matemáticas de modo que las soluciones de los problemas llegaran por la aplicación de procedimientos generales establecidos previamente.

Princeton consiguió dar la vuelta a este retraso en pocas décadas, para lo que fueron necesarios algunos hechos fortuitos. El primero, que Woodrow Wilson, más tarde presidente de Estados Unidos, la presidiera entre 1902 y 1910 y cediera a la insistencia de uno de sus mejores amigos, el matemático Henry Burchard Fine (1858-1928), para que potenciara los departamentos de ciencias de la universidad. Al abrazar Wilson la alta política, Fine quedó como decano de ciencias y redobló los esfuerzos para dotar de una estructura estable a la parte científica de la universidad. El segundo hecho fue que el impulso renovador no se detuvo a la muerte de Fine, ya que halló su continuación en la filantropía de algunas de las grandes fortunas estadounidenses: entre ellas, la de la familia Rockefeller, que invirtió grandes cantidades en mejorar la universidad y creó cinco cátedras provistas de un salario considerable, ideado para seducir a los mejores científicos europeos.

En esta línea, la incorporación en el año 1930 del matemático de origen húngaro John Von Neumann (1903-1957) constituyó todo un golpe de efecto, ya que se trataba de uno de los discípulos más brillantes de David Hilbert, y, sobre todo, fue una pieza de vital importancia para la carrera matemática posterior de Nash. Otros grandes benefactores de Princeton fueron los Bamberberg, que donaron la suma necesaria a fin de crear un polo de atracción para los mayores investigadores científicos europeos de la época: el Instituto de Estudios Avanzados.

A estos hechos de marcado signo monetario se sumó que Europa atravesó en la década de 1930 una gravísima crisis política, económica y social que favoreció el auge del comunismo, el fascismo y, sobre todo, el nazismo, con el ascenso de Hitler a la cancillería de Alemania. Princeton supo atraer entonces a los grandes científicos europeos con dos reclamos: grandes sueldos y una absoluta independencia en su trabajo. Este objetivo se vio favorecido por la ignominiosa expulsión de los profesores de origen judío en algunas universidades europeas, lo que allanó la senda de sus exilios. Así, a principios de 1933, Einstein pasó a formar parte del

Instituto de Estudios Avanzados, y ese mismo año también se incorporó el austríaco Kurt Gödel (1906-1978), padre de la lógica matemática moderna.

Como resultado de todo lo anterior, Princeton se convirtió en un lugar peculiar durante la década de 1940, con una amalgama de gentes de diversas procedencias y lenguas que, no obstante, tenían algo en común: todos se sentían felices de encontrarse a salvo de los peligros de la guerra y estaban dispuestos a compensar a la universidad con su trabajo. La ilusión, el talento y los esfuerzos que derramaron en los años siguientes lograron lo que parecía imposible: que Princeton desbancara a Gotinga como centro de las matemáticas mundiales. Aquella universidad que aglutinaba a los mejores estudiantes estadounidenses y los grandes profesores europeos no solo se situó a la vanguardia de varias ramas de la matemática, como la topología, el álgebra y la teoría de números, sino también de aquellas que estaban naciendo en ese momento: la investigación operativa y la teoría de juegos, dos disciplinas en las que Nash destacó durante sus años de estancia. Por el contrario, Harvard y otras universidades desaprovecharon las circunstancias, hicieron mal sus cálculos y se quedaron atrás, especialmente en lo referente a matemáticas. Tardarían muchos años antes de volver a compararse con Princeton.

## UN AMBIENTE DE EXCELENCIA Y PRESIÓN

Nada más arribar a la universidad y al igual que el resto de doctorandos de Princeton, Nash quedó en manos de Solomon Lefschetz (1884-1972), un matemático de origen ruso y educado en Francia que se encargó de orientarle y explicarle las expectativas que Princeton depositaba en todos ellos. Lefschetz le dejó bien claro qué esperaba de los estudiantes de doctorado: que empezaran su carrera investigadora de forma inmediata y fuesen capaces de escribir y defender su tesis doctoral en pocos años. Esta directriz sometía a los estudiantes a una gran presión; a cambio, las reglas de cómo emplearan su tiempo eran bastante laxas, de modo que solo asistían a las clases que consideraban adecuadas y las notas que

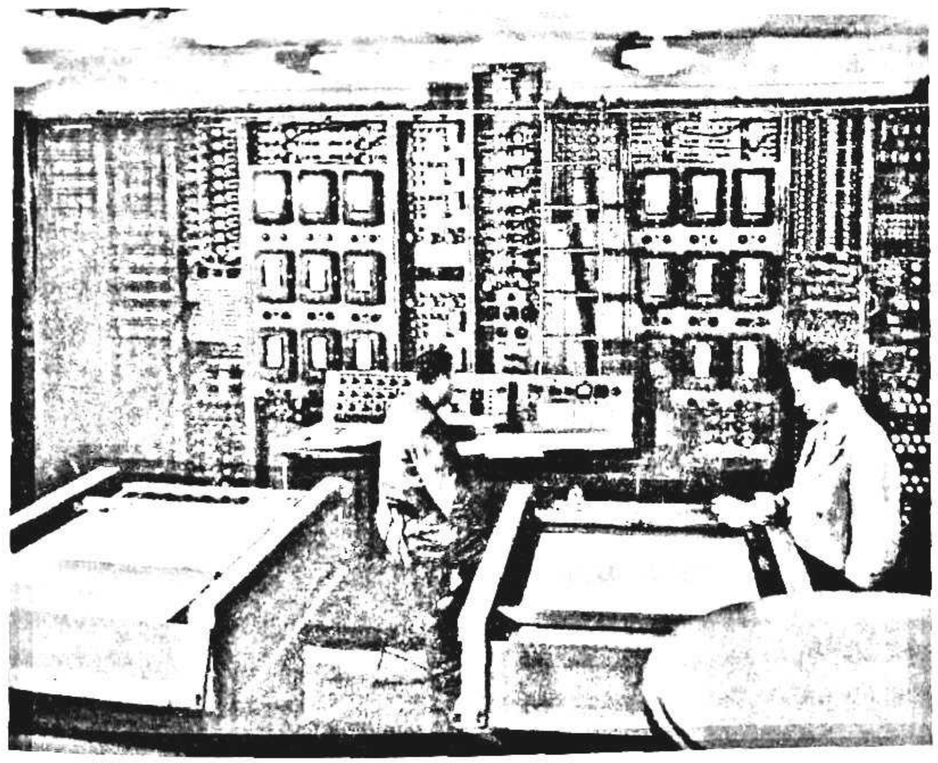


FOTO SUPERIOR:
**Fachada del Stanhope Hall, en la Universidad de Princeton, en la que Nash ingresó en 1948 y donde obtuvo su doctorado. Erigido en 1803, es el tercer edificio más antiguo de la universidad y fue la sede original de una biblioteca y dos sociedades literarias.**

FOTO INFERIOR:
**En 1950, la Universidad de Princeton causó sensación al revelar que usaba un cerebro electrónico, el New 4000 Tube Brain, con el propósito de diseñar y construir misiles guiados. Su extraordinaria rapidez de cálculo matemático ahorraba mucho dinero y años de trabajo.**

recibían en las restantes clases afectaban poco a su rendimiento académico. En este sentido, el único requisito pasaba por superar un examen general del curso, cuyo contenido dependía de los intereses del doctorando. Por lo demás, la vida social de los doctorandos resultaba casi inexistente, y la relación con las mujeres, muy difícil. Dada su trayectoria, Nash no se sintió nada a disgusto con el régimen absorbente que le imponía la universidad. La vida, así, se reducía a las matemáticas y a un contacto fructífero y constante entre profesores y alumnos, sobre todo en las charlas de café, donde todos podían expresar sus ideas y escuchar opiniones sobre los temas que les ocupaban.

Uno de los grupos más activos de Princeton giraba en torno al álgebra, la rama de la matemática que estudia la combinación de elementos de estructuras abstractas acorde a ciertas reglas. El grupo de álgebra de Princeton estaba encabezado por el reputado matemático austríaco Emil Artin (1898-1962), que centró su actividad científica en la teoría algebraica de números. Nash participó de las disquisiciones algebraicas de Artin y aprovechó sus conocimientos, pero terminó acercándose a otro grupo mucho más importante para su carrera: el que se concentraba en torno a Tucker y se dedicaba a la teoría de juegos.

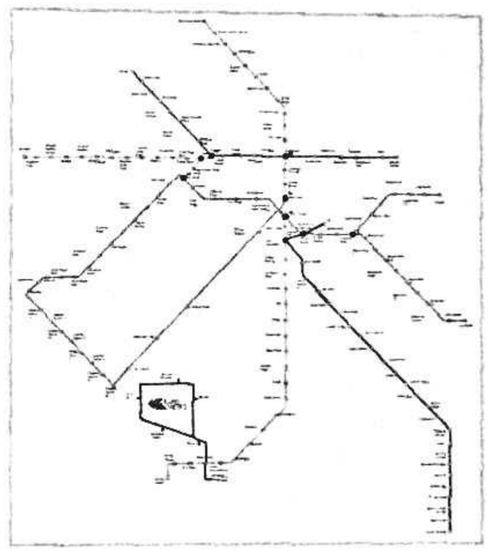
## UN TERRITORIO VIRGEN PARA NASH

En aquel momento, la teoría de juegos era una rama de conocimientos emergente y sin el prestigio de la topología y el álgebra. Por una parte, resultaba demasiado novedosa para considerarla parte de las matemáticas clásicas, y por otra, era demasiado aplicada para inscribirse dentro de las matemáticas puras. La teoría de juegos, en definitiva, es un área de la matemática aplicada que utiliza modelos para estudiar los conflictos de intereses. Se trata de racionalizar situaciones de competencia entre varios jugadores, que es como se llama a los intervinientes en un juego. Nash, fuera por su gusto por los juegos de mesa, por tratarse de una teoría nueva o, simplemente, porque le seducía poder expresar sus ma-



temáticas sin las restricciones que imponían otras ramas más consolidadas, decidió orientar su tesis doctoral hacia la teoría de juegos. También es cierto que hacía tiempo que en su cabeza bullían ideas sobre estos contenidos. En todo caso, el tema no tenía demasiado prestigio dentro del Instituto de Estudios Avanzados, ya

### LA TOPOLOGÍA



La representación del plano del metro de Delhi tiene poco que ver con el mapa real de dicha ciudad india.

En Princeton se concedía una especial importancia a la topología, una rama de las matemáticas que estudia las propiedades de los cuerpos geométricos que permanecen inalteradas por transformaciones continuas. En el caso de la geometría euclídea, dos figuras son equivalentes si se puede transformar una en otra mediante isometrías —rotaciones, traslaciones, reflexiones— conservando las medidas de ángulo, área, longitud, volumen y otras. Para un observador, dos figuras equivalentes serán la misma, solo que puesta en un sitio diferente del espacio. Sin embargo, en topología, dos objetos son equivalentes en un sentido mucho más amplio: basta con tener el mismo número de trozos, huecos, intersecciones, etcétera. Además, se permite doblar, estirar, encoger y retorcer los objetos si no se rompe ni separa lo que estaba unido, ni se pega lo que estaba separado. Así, un triángulo sería lo mismo que una circunferencia, ya que cumpliría estas condiciones; pero una circunferencia no equivaldría a un segmento, ya que habría que pegarlo por algún punto. Un ejemplo que ilustra la importancia de la topología es la representación de planos. Los usuarios del metro pueden orientarse con la ayuda de un plano que no es equivalente en el sentido euclídeo al metro real, pues aparecen simplificaciones. En realidad, lo que interesa de una línea del metro es su origen, su destino y sus cruces: mientras se mantenga esa información, el plano será útil. Eso se debe a que las líneas del metro y su representación mediante planos son equivalentes desde el punto de vista topológico.

que quienes se dedicaban a las matemáticas puras no veían con buenos ojos unas matemáticas que tenían aplicaciones para las ciencias sociales y la economía. De hecho, aún persiste una pugna entre las matemáticas puras y las aplicadas, que en algunos círculos se consideran menores y menos dignas. Para colmo, la teoría de juegos apenas empezaba a formar su cuerpo doctrinal y sus saberes no se tenían por consolidados.

Incluso en un grupo tan peculiar como este, Nash fue calificado rápidamente como una persona rara, excéntrica y arrogante. Todos los estudiantes del primer curso de doctorado en Princeton eran extremadamente valiosos y conscientes de su excelencia, la mayoría se mostraban muy competitivos y, en muchos casos, orgullosos y engreídos, pero Nash se llevaba la palma. Sus condiscípulos soportaban como podían que aquel muchacho alto y de apariencia fuerte despachara de mala manera cualquier especulación matemática que le pusieran por delante, calificándola displicentemente de obvia, trivial y carente de interés. Aparte de ningunear a los demás, alardeaba a menudo de que en el Instituto Tecnológico Carnegie ya había conseguido una demostración del teorema fundamental del álgebra de Gauss. Naturalmente, estas conductas le distanciaron aún más de la querencia popular.

## EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA DE GAUSS

Dicho teorema, en la versión que estudió Gauss —ya que posteriormente fue generalizado—, enuncia que todo polinomio en una variable posee tantas raíces como indica su grado, aun admitiendo que algunas de estas raíces pueden ser múltiples. Un polinomio P es una expresión de la forma $P(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$, donde los coeficientes $a_n, a_{n-1},\ldots, a_1, a_0$, son números reales. El grado de $P$ es el exponente mayor al que se eleva la variable $x$, que aquí se ha notado por $n$. Las raíces del polinomio son los puntos donde se anula, o sea los puntos $x$, tales que $P(x)=0$. Como consecuencia natural del teorema se deduce que todo polinomio de grado $n$ tiene $n$ raíces, no necesariamente todas diferentes. Si estas



se denotan por $r_1, r_2, \ldots, r_n$, entonces se puede descomponer en producto de monomios de la forma:

$$P(x)=c\,(x-r_1)\cdot(x-r_2)\cdot\ldots\cdot(x-r_n)$$

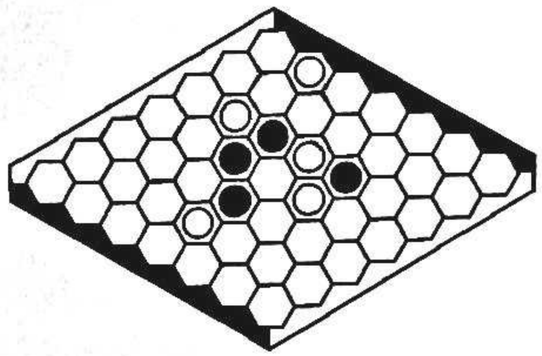
El problema de la búsqueda de raíces de un polinomio se complicaba cuando se trataba de encontrar soluciones para ecuaciones tan aparentemente sencillas como $x^2+1=0$. Parecía evidente que ningún número elevado al cuadrado puede dar un número negativo, tanto si es positivo como negativo. Así pues, se tuvo que crear un nuevo tipo de números que resolvieran esas ecuaciones. El nuevo número, $\sqrt{-1}$, se llamó número imaginario y fue notado por $i$. A lo largo de su vida, Gauss empleó los números imaginarios para dar varias demostraciones de este resultado. Otros ilustres matemáticos, como los franceses Augustin Louis Cauchy (1789-1857) y Joseph Liouville (1809-1882) y el neerlandés Luitzen Brouwer (1881-1966), también lograron demostrarlo de forma distinta. A este selecto grupo hay que añadir a otro gran matemático que, además, y para desesperación de sus compañeros de doctorado, lo consiguió a edad muy temprana: John Forbes Nash.

## SOBERBIA Y CREATIVIDAD

La arrogancia juvenil de Nash, justificada o no, carecía de límites. De hecho, no se sentía intimidado por nadie, independientemente de su fama. Ni siquiera por Einstein. Durante su primer año en Princeton, Nash reflexionó sobre algunas cuestiones de física relacionadas con matemáticas y decidió discutirlas directamente con la mayor gloria del Instituto de Estudios Avanzados. Con su proverbial paciencia, Einstein accedió a debatir con aquel joven sus ideas y ambos pasaron una hora hablando de las ecuaciones de Nash aplicadas a la física. Finalmente, Einstein, que lo trató con cortesía, le recomendó estudiar algo más de física antes de proseguir con sus especulaciones.

Nash se aplicó entonces de lleno a la teoría de juegos, a la que entre otras razones llegó por su interés en los juegos de mesa, como

FIG. 1



el Backgammon o el Go. Estos pasatiempos, muy populares entre los residentes de Princeton, vinieron de la mano de los emigrados europeos. Nash los disfrutó tanto que incluso diseñó uno que se abrió paso en las salas de descanso. Aquellas partidas le relacionaron con John Milnor, compañero de doctorado y uno de los matemáticos más importantes de su generación, pues ganaría la medalla Fields y el premio Abel. Este habló así del juego de Nash:

> Nash bullía con ideas matemáticas, no solo en la teoría de juegos, sino también en geometría y topología. Fui iniciado en el juego del Go y el Kriesgsspiel, una variante alemana del ajedrez a ciegas, y también en un ingenioso juego topológico al que llamábamos Nash, en honor de su inventor. Tiempo después, descubrimos que este mismo juego había sido inventado unos años antes por Piet Hein.

## EL HEX, O JUEGO DE NASH

Para jugar al juego de Nash o, como se conoce en la actualidad, juego de Hex, tal y como lo denominó el danés Piet Hein, se necesita un tablero con forma de rombo con $n$ casillas de lado. El número $n$ no es fijo y se puede usar para graduar la dificultad del juego. En Princeton era muy popular la versión con $n = 14$.

El tablero se llena con casillas hexagonales, como se ilustra en la figura 1. Dos lados opuestos se colorean de negro, y los otros dos, de blanco. Los jugadores van colocando alternativamente fichas de su correspondiente color —uno juega con fichas blancas, y el otro, con negras— en los hexágonos. Las fichas, una vez ubicadas, no pueden volver a moverse. El jugador que lleva las negras intenta construir una cadena de piezas negras que una los bordes negros del tablero, mientras que el jugador blanco intenta formar una cadena de piezas blancas que una los bordes blancos. El juego continúa hasta que uno de los dos jugadores consigue su objetivo.

Una pregunta que surge de manera inmediata es si existe una estrategia ganadora para el juego de Nash. Es decir, ¿se puede asegurar que el jugador que haga la primera jugada ganará con seguridad la partida si escoge en cada paso la estrategia correcta,

### JOHN MILNOR

John Willard Milnor nació en 1931 en Orange, Nueva Jersey (Estados Unidos), y se doctoró en la Universidad de Princeton con la tesis *Isotopía de enlaces* (1954), una rama de la topología que estudia el objeto que se obtiene de la modelización matemática de la noción cotidiana de nudo. Nombrado profesor en 1960, se incorporó al Instituto de Estudios Avanzados de Princeton en 1970 y dirigió el Instituto de Ciencias Matemáticas de la Universidad Estatal de Nueva York desde 1989. Su contribución matemática fue impresionante: ya en 1950, vio unos problemas abiertos en una pizarra, resolvió el primero de ellos para asombro de su profesor, Albert Tucker, y obtuvo el teorema de Fáry-Milnor, que afirma que si la curvatura total de un nudo es menor o igual que 4, entonces el nudo es trivial. Compartió el mérito con el matemático húngaro István Fáry (1922-1984), que lo había logrado por su cuenta un año antes. Posteriormente, demostró la existencia de las estructuras exóticas en la esfera de dimensión 7 —que también clasificó—, el teorema de la bola peluda mediante métodos elementales —solo las esferas de dimensión 1, 3 y 7 se pueden paralelizar o peinar— y el teorema de Milnor-Wolf. Dadas sus aportaciones en K-teoría, sistemas dinámicos, geometría algebraica y teoría de singularidades, su nombre figura en numerosos resultados matemáticos: número de Milnor, fibración de Milnor, bola de Milnor, esferas exóticas de Milnor, invariante de Kervaire-Milnor y torsión de Milnor, etcétera. Investigador y autor de obras de obligada referencia, no solo ganó la medalla Fields y el premio Abel, sino otro galardón que se le resistió a Nash: el premio Putnam.

independientemente de lo que haga el segundo jugador? La respuesta es sí. Quien inicia la partida tiene una estrategia para ganar siempre. Lo que ocurre es que la demostración de esta afirmación no es constructiva, sino que se hace mediante especulación matemática; no da una receta de qué hacer frente a cada movimiento del adversario. Por lo tanto, la estrategia existe, pero es la pericia del jugador la que ha de encontrarla.

## ¿PARA QUÉ JUEGOS EXISTE ESTRATEGIA GANADORA?

En los juegos entre dos personas existe una estrategia ganadora para el que lo inicia si se dan las siguientes condiciones:

1. Cada jugador tiene en todo momento toda la información para decidir la jugada a realizar.

2. Los dos jugadores realizan las jugadas alternativamente, cada uno en su turno.

3. Ningún elemento de azar interviene en el juego.

4. Toda partida finaliza después de un número finito de jugadas con la victoria de uno de los dos jugadores.

Obviamente, la tercera de ellas excluye la oca, el parchís, los juegos de cartas, etcétera. En estas condiciones es posible encontrar una estrategia ganadora para uno de los dos jugadores; normalmente, para el que inicia el juego, porque eso le da ventaja. La demostración de este hecho es bien sencilla. Supóngase que los jugadores A y B juegan a un juego que verifica los cuatro puntos descritos anteriormente. Si A tiene una estrategia ganadora, ya se ha terminado. Si no la tiene, significa que en todos los casos posibles existirá una jugada de B a la que A no podrá responder de manera conveniente. Y precisamente esto indicaría que en este caso sería B quien tiene esa estrategia ganadora. Así pues, el juego de Nash tiene una estrategia ganadora, dado que acaba en un número finito de pasos: en algún momento se acaban las casillas donde situar las piezas.

La pregunta que se puede plantear es si existe estrategia ganadora para los juegos que no acaban en un número finito de jugadas y admiten el empate o tablas, como por ejemplo el ajedrez. La respuesta también es positiva. En 1912, el matemático alemán Ernst Zermelo (1871-1953) demostró que todo juego de información perfecta, con suma nula y con dos jugadores, se determina de forma estricta. Así, el ajedrez también es un juego de determinación estricta: existe una estrategia ganadora para uno de los jugadores, pero el teorema no proporciona un medio para encontrar esta estrategia. Por suerte para los amantes del ajedrez, el método de demostración no es constructivo.

En cuanto a la competencia, un juego del que se conoce la estrategia ganadora pierde todo su interés, ya que las partidas tienen ganador predeterminado y no hay posibilidad de cambiarlo. En cambio, el ajedrez sí mantiene el interés: aunque hay la certeza teórica de que existe esa estrategia, nadie ha sido todavía capaz de explicitarla. Con lo cual, el ajedrez sigue gozando de una excelente salud tantos siglos después de su aparición.

## LOS IMPULSORES DE LA TEORÍA DE JUEGOS

Antes de especificar la revolución que supusieron los trabajos de Nash, debe señalarse que Princeton albergaba en aquel momento a las máximas figuras mundiales de la teoría de juegos, ambos exiliados ante la pesadilla nazi: John Von Neumann (1903-1957), matemático estadounidense de origen húngaro, y Oskar Morgenstern (1902-1977), economista estadounidense de procedencia alemana. El primero de ellos definió con términos certeros qué es un juego: «Una situación conflictiva en la que uno debe tomar una decisión sabiendo que los demás también toman decisiones, y que el resultado del conflicto se determina, de algún modo, a partir de

todas las decisiones realizadas». En 1944, Von Neumann y Morgenstern publicaron la obra seminal más importante de la teoría de juegos: *The Theory of Games and Economic Behavior —Teoría de juegos y conducta económica—*. La idea del libro era racionalizar y matematizar los problemas económicos mediante la teoría de juegos, con el propósito de suplir de forma constructiva las lagunas de las teorías económicas y establecer una metodología analítica que resolviera el problema. Para ello, partieron de la idea de que la economía no estaba trabajando de acuerdo con el método científico, ya que se fundamentaba exclusivamente en cálculos que podían explicar los sucesos del pasado, pero no aportaba herramientas para explicar el comportamiento económico presente y, mucho menos, predecir la evolución futura.

Von Neumann y Morgenstern sostuvieron firmemente que la teoría de juegos podía ser la herramienta que otorgara base científica a la economía. En este sentido, Morgenstern se encargó de sentenciar en el prólogo de la obra que «hasta que no se proporcionen las pruebas correspondientes la teoría económica no existe como teoría científica. Los movimientos de los planetas se conocían mucho antes de que la teoría de Newton calculara y explicara sus trayectorias».

La repercusión de *Teoría de juegos y conducta económica* fue enorme y mereció un artículo en la primera página de *The New York Times*. En la actualidad, sería injusto reducir esta obra a una mera aportación a la ciencia económica, dado que sus aplicaciones son mucho más amplias. Los métodos aportados por los autores resultan útiles para la política, la sociología e incluso la estrategia militar. En líneas generales, el libro se basa en que el comportamiento de los individuos que intervienen en el juego es racional, en el sentido de que cada uno tomará las decisiones que más le beneficie. Esta asunción hace que las estrategias sean previsibles y, por tanto, sea posible formular un modelo.

Dado que cualquier situación de conflicto se prestaba a ser modelizada en la teoría de juegos, no es de extrañar que los militares fueran los primeros interesados en que avanzara, para así encontrar una forma de tomar decisiones racionales y prever los movimientos futuros del enemigo. La Segunda Guerra Mundial se tradujo en un



**JOHN VON NEUMANN**

John Von Neumann nació en Budapest en 1903 bajo el nombre de Neumann János Lajos. Desde joven manifestó una inteligencia y memoria prodigiosas, y su capacidad de cálculo superó incluso a las máquinas de su tiempo. Se doctoró en Matemáticas por la Universidad de Budapest (1926) mientras estudiaba en Berlín y recibía clases de Einstein. También se licenció en Ingeniería química por la Politécnica de Zúrich y asistió a los seminarios de David Hilbert en Gotinga. En 1929 fue invitado a la Universidad de Princeton y acudió junto a su futura esposa, Mariette Koevesi. Ante el ascenso nazi (1933) se incorporó al recién inaugurado Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, al que dio prestigio. Fue el último gran matemático polivalente de la historia: nadie ha podido abarcar y hacer tantas aportaciones clave en física cuántica, análisis funcional, teoría de conjuntos, teoría de juegos, análisis numérico, cibernética, hidrodinámica, estadística y muchos otros campos. También fue de los primeros en afirmar que el desarrollo y solución de numerosos desafíos matemáticos estaba asociado a la informática. Aunque Princeton no quiso construir un ordenador, él desarrolló los fundamentos de la algorítmica y codiseñó la estructura de los ordenadores modernos.

**Un legado asombroso**

Von Neumann investigó problemas en el campo de la hidrodinámica numérica y desarrolló con Robert D. Richtmyer (1910-2013) un algoritmo para definir la viscosidad artificial y entender las ondas de choque. Asimismo, revitalizó la economía al dotarla de fundamentos científicos y de una herramienta nueva para modelizar las situaciones de conflicto. También hizo aportaciones clave a la lógica matemática con la axiomatización de la teoría de conjuntos, tarea que volvió a repetir en física cuántica y permitió definir los sistemas deterministicos y no deterministicos. Durante la Segunda Guerra Mundial se unió al Proyecto Manhattan y contribuyó al concepto y diseño de los explosivos de contacto necesarios para comprimir el núcleo de plutonio. Falleció en 1957, con cincuenta y tres años y en la cima de su talento. Hoy en día, muchas distinciones científicas llevan su nombre: Nash, por ejemplo, ganó el premio de Teoría John Von Neumann en 1978 por sus contribuciones teóricas fundamentales y continuadas a la investigación operativa.

fuerte interés por esta rama de las matemáticas, circunstancia que también explica el desarrollo de la informática en aquellos años. No obstante, el interés militar por la teoría de juegos, al igual que en el desarrollo de los ordenadores, no quita sus numerosas aplicaciones de estricto carácter civil, que son la mayoría en ambas ramas.

## LA IMPORTANCIA DEL MODELO

El punto de partida de la teoría de juegos era reproducir mediante las matemáticas las relaciones que se establecen y un sistema de premios y penalizaciones que se parezcan lo más posible a la situación real. La modelización es un proceso matemático que permite traducir al lenguaje matemático un problema real para el que se quiere encontrar solución. Incluso los problemas de las matemáticas puras empiezan por la modelización. Se trata de traducir al lenguaje de las matemáticas —ecuaciones, desigualdades— un problema que se describe con palabras.

Para que una modelización sea lo suficientemente buena debe poder describir lo que ocurre y, lo más interesante, predecir los comportamientos futuros. Si en un problema matemático se pueden hacer predicciones, eso ayuda a tomar las decisiones más adecuadas y eficientes. Por descontado, en la parte de la modelización de un problema hay un proceso de ajuste iterado, de forma que cuando el modelo no resiste el contraste con la realidad debe ser cambiado; solo así podrá hacerse más cercano a la situación a la que se enfrente. Por tanto, cuanto más se ajuste el modelo a la realidad, mejor y más útil será.

De esta forma, la teoría de juegos se erigió como un instrumento lógico para describir el comportamiento humano competitivo, una racionalización de los conflictos de intereses. Basado en la consideración de la actuación de los demás participantes o jugadores, este intento de caracterización del comportamiento racional competitivo y cooperativo forma parte de un análisis más general de la teoría de la decisión, que el propio Von Neumann desarrollaría más adelante. La teoría de juegos se mueve así en un entorno de información perfecta donde todos los jugadores conocen los valores asignados a cada estrategia y las utilidades que cada opción reporta a sus competidores. Este estrecho entorno, tan condicionado, puede luego ir relajando sus hipótesis para hacer sus resultados más realistas.



## PLANTEAMIENTOS INICIALES

El modelo matemático definido por Von Neumann y Morgenstern, un juego de $n$ personas que ellos centraron especialmente en el caso de dos personas, se describe de la manera siguiente:

Hay $n$ agentes o jugadores, numerados de 1 a $n$. Cada jugador $i$, con $i$ entre 1 y $n$, tiene a su disposición un conjunto $S_i$ de posibles estrategias. Cada jugador elige una estrategia concreta $s_i$ de su conjunto de estrategias. La naturaleza del juego permite que los agentes escojan simultáneamente entre sus opciones. El resultado final del juego es, por tanto, función de las $n$ elecciones individuales de cada jugador. El resultado para cada jugador en términos de ganancia o pérdida viene expresado por una función $p_i$ que toma valores reales y que se evalúa en el producto cartesiano de $S_1 \cdot S_2 \cdot \ldots \cdot S_n$, cuyos elementos están formados por vectores de $n$ elementos, en el que cada uno de ellos representa la alternativa elegida por cada uno de los $n$ jugadores. Así, se tiene:

$$p_i : S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n \longrightarrow R$$

Esta función se llama ganancia, aunque puede ser negativa y representar una pérdida. Con esas mismas elecciones, el jugador $j$ tendrá otro valor distinto para su función de ganancia $p_j$. El objetivo de cada jugador $i$ es elegir $s_i \in S_i$ para maximizar su ganancia, bien entendido que para cada $j \neq i$, el jugador $j$-ésimo simultáneamente elige $s_j$ para intentar maximizar su propia ganancia $p_j$.

Este concepto puede ilustrarse con el ejemplo de dos jugadores que se juegan 10 euros en cada envite, de forma que cada uno apuesta 5 en cada jugada y en el que se impone que $S_1 = \{A, B, C\}$ y $S_2 = \{A, B, C\}$. Obsérvese que los conjuntos de alternativas de cada jugador son iguales, pero eso no ha de ser siempre así.

En este ejemplo, la función de pagos, expresada en euros, viene dada por la siguiente tabla:

| MATRIZ DE PAGOS | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | Jugador 2 | | |
| | | A | B | C |
| Jugador 1 | A | 9 \| 1 | 1 \| 9 | 2 \| 8 |
| | B | 6 \| 4 | 5 \| 5 | 4 \| 6 |
| | C | 7 \| 3 | 8 \| 2 | 3 \| 7 |

La primera cantidad de cada casilla son los euros que recibe el jugador 1, y la segunda, los que recibe el jugador 2 de los 10 que se juegan. Es decir, $p_1(A,B) = 1$ y $p_2(A,B) = 9$, lo que indica que el jugador 1 gana un euro —en definitiva pierde 4, porque para jugar ha puesto 5— y el jugador 2 gana 9 euros, de los que si se quita la inversión inicial se queda en 4 euros.

En la interpretación usual del modelo matemático, los distintos jugadores suelen ser personas. Sin embargo, caben otras posibilidades: los jugadores pueden ser naciones, empresas, equipos, ordenadores —programados por seres humanos—, etcétera. Cabe destacar que la ganancia que reporta el juego no se mide necesariamente en términos de algo simple y objetivo, como el dinero, sino que puede incorporar cualquier motivación relevante que los jugadores pudieran contemplar, sea de naturaleza egoísta, altruista o lo que fuere.

En general, Von Neumann y Morgenstern trataron los problemas de suma nula, que son aquellos en que las ganancias y las pérdidas de los jugadores se compensan y suman 0. Una partida de póquer con apuestas es un ejemplo de este tipo de juegos, porque para saber las ganancias o pérdidas de un jugador concreto basta con conocer el saldo conjunto del resto de los jugadores. El juego del ajedrez y la mayoría de los juegos de mesa son de suma nula. Von Neumann y Morgenstern, además, cuando trataron en su libro los juegos de suma no nula, lo redujeron a juego de suma nula, para lo que crearon un jugador ficticio que absorbía toda la ganancia o pérdida. El ejemplo de la tabla anterior es de suma nula, porque todos los pares de ganancia suman 10, que es lo que ponen los propios jugadores. En el caso de la elección (A, B) vista antes, la pérdida de 4 euros del jugador 1 es la ganancia del jugador 2.



## JUEGOS COOPERATIVOS

Ambos se refirieron también a lo que denominaron «juegos cooperativos», donde todos los jugadores o parte de ellos pueden llegar a acuerdos si unirse les reporta mayores ganancias que jugando de manera individual. Por ejemplo, cualquier venta es un juego cooperativo: si no colaboran el vendedor, que quiere vender lo más caro posible su producto, y el comprador, que busca adquirirlo lo más barato posible, ninguna venta se realizaría. La cooperación se necesita en ambos sentidos: si el comprador no quiere comprar, no entra en regateos, y si el vendedor no quiere vender, ni siquiera pone el bien a la venta. La transacción se produce cuando el vendedor elige, de todas sus alternativas, la misma cantidad que el comprador, y eso requiere un cierto tipo de cooperación.

Otro ejemplo bien conocido son las decisiones del Consejo de Seguridad de la ONU, formado por diez miembros provisionales, que van rotando, y cinco miembros permanentes. Para que una resolución sea aprobada necesita al menos nueve votos a favor y que no se oponga ninguno de los miembros permanentes. Para modelizarlo mediante la teoría de juegos se podría decir que se necesitan 39 votos para sacar adelante una propuesta, y que los votos de los miembros del Consejo de Seguridad multiplican por siete los votos unitarios de los miembros no permanentes.

Como es lógico, ninguna resolución se aprobará sin el voto de un miembro permanente, porque entonces tendría, como mucho, 28 votos de los permanentes y, en el mejor de los casos, 10 de los no permanentes, cuya suma no llega al mínimo previsto. Por otro lado, aunque los miembros permanentes voten a favor, eso les da 35 votos, y necesitarían al menos 4 más de los no permanentes. Por tanto, la única manera de sacar votaciones adelante es que haya un cierto grado de cooperación entre los países votantes. En este sentido, resulta habitual que las propuestas se consensúen para lograr la cooperación necesaria que permita aprobar las resoluciones.

Los juegos no cooperativos son aquellos donde esta posibilidad de cooperación no existe, y los que interesaron en mayor medida a Nash, por lo que más adelante se verán algunos ejemplos.

## ESTRATEGIAS MIXTAS

Una de las grandes aportaciones de *Teoría de juegos y conducta económica* es considerar las estrategias mixtas, que se construyen como combinación de estrategias puras —las estrategias definidas anteriormente—. Un ejemplo que ilustra esta cuestión es el de una familia que compra una caja fuerte cuya combinación tiene dos ruedas con números del 0 al 9, y de cuyo contenido quiere adueñarse un ladrón que sabe que, si no acierta al primer intento, saltará la alarma y habrá muchas posibilidades de que lo atrape la policía y acabe en prisión.

La situación se puede modelizar con un juego, ya que existe un conflicto de intereses: la familia quiere proteger sus bienes y el ladrón los quiere. Se trata de un juego entre dos personas, en el sentido de que hay dos jugadores, aunque uno de ellos sea colectivo. También es de suma nula, porque lo que gane el ladrón es justo lo que pierde la familia; asimismo, no es cooperativo, dado que la familia no tiene ningún interés en colaborar con el ladrón. Entonces, hay que preguntarse cuál es la mejor estrategia para cada uno de los jugadores.

Ambos tienen 100 posibilidades, del 0 al 99. No es posible dar una estrategia que sea la mejor para la familia. Si se aconseja siempre el 54 como combinación más favorable, el ladrón tendría una ventaja, pues él también probaría con la mejor combinación de la familia. Así, la mejor elección es escoger aleatoriamente cualquier combinación con la misma probabilidad $1/100$.

Esa solución es una estrategia mixta. Se expresa como combinación lineal de las estrategias puras ponderadas por $1/100$, que es la probabilidad que se asigna a cada una. Así, la estrategia óptima se calcula como combinación lineal de las estrategias puras. Para el ladrón, su estrategia óptima es la misma, o sea, escoger una de las combinaciones, con la misma probabilidad.



## EL TEOREMA DEL MINIMAX

Otra de las grandes aportaciones de John Von Neumann y Oskar Morgenstern fue el conocido como «teorema del minimax» para juegos de suma cero, cuyos fundamentos fueron desarrollados por Von Neumann en su artículo «Zur Theorie der Gesellschaftsspiele» (1928) —Sobre la teoría de juegos—. La alternativa minimax puede resumirse como un método de decisión con el que se minimiza la pérdida máxima esperada en juegos con adversario y con información perfecta.

Se dice que se tiene una información perfecta cuando se conocen tanto las alternativas del adversario como las de uno mismo y se sabe el efecto que tienen las decisiones, es decir, se conoce con exactitud la función de ganancia para cada jugador.

El funcionamiento de minimax puede resumirse como la elección del mejor movimiento para uno mismo suponiendo siempre que el contrincante escogerá el que te resulte más perjudicial. El teorema afirma que para juegos de suma cero con información perfecta se puede encontrar una estrategia minimax para ambos jugadores. Para ilustrarlo, considérese la matriz de pagos del siguiente ejemplo:

| MATRIZ DE PAGOS | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | Jugador 2 | | |
| | | A | B | C |
| Jugador 1 | A | 9 \| 1 | 1 \| 9 | 2 \| 8 |
| | B | 6 \| 4 | 5 \| 5 | 4 \| 6 |
| | C | 7 \| 3 | 8 \| 2 | 3 \| 7 |

Ahora es posible centrarse en la estrategia del primer jugador, para ver si se encuentra una estrategia minimax:

1. Si el jugador 1 escoge la estrategia A, puede obtener 9, 1 o 2 euros, por lo que como mínimo obtendrá un resultado de 1 y la pérdida máxima sería de 4, dado que invierte 5 euros en cada envite.

2. Si elige la estrategia B, puede obtener 6, 5 o 4 euros, luego como mínimo obtendrá 4 y la pérdida máxima sería de 1.

3. Si elige C, entonces la recompensa es de 7, 8 o 3. En el peor de los casos, una pérdida de 2.

De todos los posibles resultados, el que prefiere el jugador 1 es el B, ya que es el mínimo de las máximas pérdidas posibles. La estrategia minimax consiste en elegir la tarjeta B, ya que esa estrategia garantiza que, como mínimo, obtendrá 4 euros y la pérdida será mínima. Así que escoge la mínima pérdida de las máximas posibles, y de ahí el nombre de la estrategia. También es posible hacer un razonamiento parecido para el segundo jugador:

1. Si el segundo jugador elige A, obtiene 1, 4 o 3 euros. Como mínimo 1 euro, con una pérdida de 4.

2. Si elige B, lo peor que puede obtener es 2, con una pérdida de 3.

3. Si elige C, su peor resultado sería 6 cuando el jugador 1 elige B, con lo que ganaría 1.

Su estrategia minimax consiste por tanto en jugar la carta C, con lo que se garantiza que, al menos, obtendrá 6.

Se trata de un juego con solución estable. Ninguno de los jugadores siente la tentación de cambiar de estrategia. Supóngase que se empieza a repetir el juego una y otra vez. El jugador 1 siempre juega B y el otro jugará siempre su estrategia minimax (C). Cada uno sabe lo que jugará el otro la siguiente vez. Ninguno de ellos querrá cambiar su estrategia, ya que el que decida hacerlo perderá.

Llegados a este punto, se llama «punto de silla» al resultado en el que coinciden las estrategias minimax de ambos jugadores. No todos los juegos tienen un punto de silla, una solución estable. La estabilidad del juego anterior desaparece simplemente trastocando el orden de las casillas BB y BC:



| MATRIZ DE PAGOS | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | Jugador 2 | | |
| | | A | B | C |
| Jugador 1 | A | 9 \| 1 | 1 \| 9 | 2 \| 8 |
| | B | 6 \| 4 | 4 \| 6 | 5 \| 5 |
| | C | 7 \| 3 | 8 \| 2 | 3 \| 7 |

Para este caso, la estrategia minimax del jugador 1 sigue siendo B y la del jugador 2 sigue siendo C. Pero la solución no es estable, porque el jugador 2, conforme avance el juego, se verá tentado a cambiar a B porque gana más: 6 en vez de 5. Pero si el jugador 2 actúa repetidamente eligiendo B, el jugador 1 cambiará a B porque le da una ganancia de 8. Este cambio del jugador 1 incita un nuevo cambio al jugador 2, que tomaría la opción A. Por ello, la situación no es estable. Para encontrar una solución estable en este problema se necesitan estrategias mixtas, es decir, el jugador 1 elegirá A, B o C con una cierta probabilidad. El cálculo de estas probabilidades exige resolver un problema de programación lineal.

## UNA SUPOSICIÓN ERRÓNEA

Una laguna de los planteamientos de Von Neumann y Morgenstern es que ambos suponen que, cuando es posible, los juegos son cooperativos. Sin embargo, esto no ha de ser necesariamente correcto. Por ejemplo, veinte personas van a cenar juntas una noche y cada una de ellas puede elegir entre dos menús: uno de 10 euros, que está bien, y otro solo un poco mejor, de 20 euros. Si cada uno se paga lo suyo, todos se inclinarán por el menú barato. Sin embargo, deciden que van a dividir la cuenta en partes iguales. Como para cada uno de los comensales pasar del menú barato al caro supone un coste marginal de solo 50 céntimos, todos eligen el menú caro. Con ello, la solución que se obtiene no coincide con la que se esperaría de un juego cooperativo.

Otro ejemplo es lo que ocurrió durante la Guerra Fría con la carrera armamentística. Si se parte del supuesto de que los gober-

nantes toman decisiones razonables y pueden cooperar en caso de interesarles, la solución obvia es quedar en igualdad de condiciones sin gastar dinero en construir armas nucleares. Esa sería la solución según las ideas de Von Neumann y Morgenstern: ambos bloques políticos están seguros en esa situación y pueden dedicar sus recursos a mejorar las condiciones de vida de sus conciudadanos. Sin embargo, la realidad fue que el equilibrio entre el bloque occidental y el soviético solo obedeció a la llamada «destrucción mutua asegurada». En este escenario, cada bloque cuenta con las suficientes armas para destruir al enemigo en caso de ser atacado, y el equilibrio no coincide con la solución óptima.

## NASH DA EN EL CLAVO: JUEGOS NO COOPERATIVOS

Este tipo de lagunas condujo a Nash a plantear alternativas a las teorías defendidas en *Teoría de juegos y conducta económica*. Desde luego, solo una persona tan osada y segura de sí misma podía pensar que tenía mejores ideas sobre la teoría de juegos que Von Neumann, una de las mayores figuras matemáticas mundiales. Así, en el verano de 1949, Nash expuso su enfoque sobre la teoría de juegos a Tucker y le propuso que dirigiera su tesis doctoral, convencido de que sus ideas novedosas sobre la materia serían válidas para obtener el doctorado. Fue una elección extraña, ya que Tucker no era un especialista en la cuestión; de hecho, se había doctorado en Princeton con una tesis sobre topología, *Aproximación abstracta a las variedades*.

Después del verano y antes de redactar su tesis, Nash fue aún más audaz y expuso sus ideas a Von Neumann, que ni siquiera se ocupaba de los estudiantes de doctorado. Este no se mostró interesado y las calificó de bastante simples y poco interesantes. Nash era plenamente consciente de que sus teorías suponían una enmienda a Von Neumann y, en sus propias palabras, «estaba jugando un juego no cooperativo en relación con Von Neumann en lugar de, simplemente, unirme a su coalición. Y, por supuesto, para él era natural, en términos psicológicos, no estar feliz del todo con



### EL DILEMA DEL PRISIONERO

El dilema del prisionero es un ejemplo clásico en teoría de juegos que ayuda a entender las ideas y cambios que Nash introdujo en la visión aceptada hasta entonces. Desarrollado originariamente en 1950 por el matemático estadounidense Merrill M. Flood (1908-1991) y su compatriota de origen polaco Melvin Dresher (1911-1992), muestra que dos personas pueden no cooperar incluso si ello va en contra del interés de ambas. Tucker formalizó el juego al introducir recompensas penitenciarias y darle el nombre de «dilema del prisionero». Su enunciado dicta que la policía arresta a dos sospechosos, pero no hay pruebas suficientes para condenarlos. Tras separarlos, se les ofrece el mismo trato. Si uno confiesa y su cómplice no, el cómplice será condenado a la pena total, diez años, y el primero será liberado. Si uno calla y el cómplice confiesa, el primero recibirá esa pena y será el cómplice quien salga libre. Si ambos confiesan, ambos serán condenados a seis años. Si ambos lo niegan, todo lo que podrán hacer será encerrarlos durante un año por un cargo menor. Lo que puede resumirse con la siguiente matriz de pagos:

| | **P2 confiesa** | **P2 no confiesa** |
|---|---|---|
| **P1 confiesa** | 6 años cada uno | P1 libre, P2 diez años |
| **P1 no confiesa** | P2 libre, P1 diez años | 1 año cada uno |

No se trata de un problema de suma cero al que se pueda aplicar el teorema del minimax. La mejor opción para los delincuentes es no confesar y recibir una condena de un año. En conjunto, pasarían dos años de cárcel. Cualquier otra opción es peor, ya que estarían diez o doce años encerrados. La solución, según Von Neumann y Morgenstern, que supusieron cooperativo el juego, es que ninguno confiesa y reciben una condena de un año: al cooperar obtienen mejor resultado que no cooperando, así que como jugadores racionales puede esperarse de ellos colaboración. En cambio, el planteamiento de Nash es novedoso. Para un conjunto $n$ de jugadores, una secuencia de $n$ elementos de estrategias $(s_1, s_2, \ldots s_n)$ constituye un punto de equilibrio para el juego si ningún jugador $i$ puede incrementar su ganancia $p_i(s_1, s_2, \ldots s_n)$ cambiando su estrategia $s_i$ mientras las otras permanecen fijas. En este caso, el punto de equilibrio de Nash se halla cuando los dos prisioneros confiesan. Haga lo que haga el cómplice, al otro le conviene haber confesado: o sale libre, si el otro no confesó, o le caen seis años y no diez, si el otro confesó. Por así decirlo, existe un punto de equilibrio en un juego cuando, una vez conocida la estrategia de los que juegan contigo, no se tiene la tentación de cambiar la estrategia escogida.

un enfoque teórico rival». Por fortuna, Tucker se mostró más sensible a sus planteamientos y le alentó a plasmar sus ideas en forma de tesis, lo que Nash hizo en 1950 bajo un título inolvidable: *Non-cooperative Games* —*Juegos no cooperativos*—. La tesis solo tenía 27 páginas, pero encerraba algunas ideas que cambiarían para siempre el enfoque de la teoría de juegos. Tucker, fascinado, le urgió a divulgarla, lo que se plasmó en un artículo publicado en septiembre de 1951 por la revista *Annals of Mathematics*, cuando Nash contaba tan solo veintitrés años de edad. Sin duda, aquel joven extraño acababa de revolucionar la teoría de juegos.

## EL EQUILIBRIO DE NASH

En su tesis, Nash halló las condiciones para que un juego tenga un punto de equilibrio. Para ello se necesita que las estrategias de cada jugador sea un conjunto finito, y que la función de ganancia sea continua para cada función $p_i$. Es decir, que a pequeños cambios en las estrategias le han de corresponder pequeños cambios en las ganancias; y que esta función $p_i$ sea lineal, lo que quiere decir, entre otras cosas, que:

$$p_i(s_1, s_2, \ldots, s_j + s_k, \ldots, s_n) = p_i(s_1, s_2, \ldots, s_j, \ldots, s_n) + p_i(s_1, s_2, \ldots, s_k, \ldots, s_n),$$

lo cual permite trabajar con estrategias mixtas. En esas condiciones, existe un punto de equilibrio para el juego. Este hallazgo fue denominado «equilibrio de Nash».

Cabe precisar que no se afirma que un punto de equilibrio deba ser un resultado deseable del juego. En ocasiones, incluso, el punto de equilibrio puede suponer un desastre para todos y cada uno de los jugadores. Es fácil imaginar, por ejemplo, el citado juego de la Guerra Fría, que tiene como único punto de equilibrio de Nash el que cada uno de los jugadores —bloques políticos— aniquila a los demás si es atacado. Muy al contrario, se debe considerar un punto de equilibrio como la descripción de lo que probablemente ocurra en una situación de total falta de cooperación: es decir, los jugadores persiguen sus objetivos individuales sin cooperar; o no pueden comunicarse entre ellos; o no hay mecanismos que les permitan cooperar, o no tienen interés alguno. La teoría de Von Neumann-Morgenstern, por el contrario, solo considera juegos cooperativos para estos casos.



> «He tendido a creer que se debe rehuir de lo que hacen otros y no seguir directamente el trabajo reciente de alguien.»
>
> — JOHN FORBES NASH.

Cuando se supone que una teoría matemática ha aportado un modelo que analiza un determinado problema de la vida real, cabe preguntarse cuán realista es, si de verdad ayuda a entender el mundo real y si sus predicciones pueden contrastarse. Quizá nadie ha dado una respuesta mejor sobre la teoría del punto de equilibrio de Nash que uno de sus colegas, John Milnor, tras plantearse si era una teoría descriptiva de cómo actúa de verdad la gente ante la competencia o una teoría normativa de cómo debería hacerlo para obtener el mejor resultado posible. Milnor creyó que probablemente ambas o ninguna, y estimó inseparables estos dos aspectos. Al hilo de este razonamiento, concluyó:

> Una teoría que describa cómo eligen entre sus opciones los otros jugadores puede ser crucial para determinar nuestra propia elección.

El trabajo de Nash puede calificarse de relativamente simple, pero tiene dos virtudes: fue original y se apartó del pensamiento dominante de la época, donde el teorema del minimax ni siquiera se cuestionaba. Por otro lado, sus ideas son sencillas de aplicar; tanto, que revolucionaron la economía y las ciencias sociales en general. Hoy en día, se encuentran ejemplos de equilibrio de Nash en biología y otras ciencias para las que no parecía que pudiese ser empleado. En particular, su aplicación a la genética de las poblaciones y a la genética evolutiva puso de manifiesto su utilidad incluso en ámbitos no necesariamente económicos.

CAPÍTULO 2

# Dos avances matemáticos en medio de la incomprensión

El paso de Nash por la corporación militar RAND se debió a su aportación sobre los puntos de equilibrio en los juegos no cooperativos. Pronto se admiraron sus ideas sobre la negociación y cómo se alcanzaban acuerdos en situaciones de conflicto, lo que avaló su ingreso en el Instituto Tecnológico de Massachusetts. Allí maravilló de nuevo a la comunidad matemática con un sorprendente hallazgo sobre las variedades.

Nash pasó su último año en Princeton inmerso en los estudios de doctorado y alternando su talento con vivas muestras de arrogancia, lo que unido a su dificultad para las relaciones sociales explica que fuera tan admirado por unos y criticado por otros. En cualquier caso, su carácter y su excentricidades nunca pasaron desapercibidos en el ámbito académico. Resultaba difícil no fijarse en aquel veinteañero que de vez en cuando montaba en bicicleta y no paraba de trazar una y otra vez figuras de ocho en el pavimento. Los testimonios posteriores de sus compañeros de estudios confirmaron que aquel no fue el único de sus comportamientos compulsivos. Así, Donald J. Newman (1930-2007), que siempre se distinguió como un buen amigo y asociado suyo, contó que siempre se le veía caminar por los pasillos silbando la misma pieza, de forma obsesiva: la *Pequeña fuga en Sol menor*, de Bach.

Con todo, Nash ya estaba considerado en el año 1950 como una figura importante dentro de la joven generación de matemáticos. No en vano, sus trabajos en teoría de juegos habían llamado poderosamente la atención, porque ayudaban a explicar de una manera realista las situaciones de conflicto. Este conocimiento resultaba muy valioso a la hora de tomar decisiones óptimas: si se sabe cómo funciona el problema y además se pueden predecir las decisiones del contrario, se adquiere una ventaja crucial. Los hallazgos de Nash trascendieron pronto el ámbito universitario y

causaron impresión en los círculos militares, donde se aspiró de inmediato a que aquel joven prometedor trabajara para ellos.

Debe aclararse que Nash recibió estas ofertas en un contexto sumamente delicado, ya que la humanidad se había adentrado de lleno en otro período conflictivo: la Guerra Fría. En septiembre de 1949, solo cuatro años después del fin de la Segunda Guerra Mundial, la transitoria alianza entre Estados Unidos y la Unión Soviética se hizo añicos al anunciar Stalin que su país tenía la bomba atómica y se equiparaba a Estados Unidos como potencia nuclear. La noticia no solo estremeció al mundo ante la posibilidad de una guerra totalmente devastadora, sino que también evidenció que el espionaje soviético había robado el secreto mejor guardado de Estados Unidos en sus propias narices, probablemente con la colaboración de ciudadanos estadounidenses con simpatías comunistas.

El inesperado equilibrio armamentístico nuclear entre las dos grandes superpotencias del mundo, regidas por unos modelos de sociedad antagónicos y con tantos países bajo su liderazgo, generó un escenario de rivalidad y recelos que hizo presagiar la peor de las colisiones; el enfrentamiento, incluso, se vio como algo inevitable. Sin embargo, en esta ocasión se sustituyó la guerra convencional, que solo garantizaba una mutua destrucción absoluta, por la denominada Guerra Fría, que se rigió principalmente por la estrategia. Aun así, resultó «caliente» en muchos puntos del planeta, usados a modo de peones de sacrificio en un tablero mundial de ajedrez.

## NASH ENTRA EN LA RAND

Entre los matemáticos, la magnitud de este desafío bélico supuso, entre otras cuestiones, una presión añadida a sus trabajos. Las altas esferas políticas, que ya les habían agradecido su colaboración para ganar la Segunda Guerra Mundial, les demandaban ahora que protegieran al país de la nueva amenaza. Al efecto, Estados Unidos creó la corporación Research and Development —Investigación y Desarrollo—, más conocida por sus siglas: RAND. Emplazada en la localidad californiana de Santa Mónica, la corporación RAND se creó como una institución de investigación estratégica que, regida por las Fuerzas Aéreas estadounidenses, pretendía atraer a los principales talentos del país. El objetivo era que participaran de forma activa en el diseño conjunto de la guerra del futuro: pródiga en conflictos regionales, pero desprovista de los enfrentamientos convencionales de una guerra clásica.



> «Una vez, alguien sugirió que yo era un prodigio; otra vez, que debería ser apodado "errores cerebrales", porque tenía ideas, pero repletas de fallos o de un sonido imperfecto.»
>
> — JOHN FORBES NASH.

Dado que el trabajo en la RAND podía ser de tipo parcial, muchos profesores de Princeton colaboraron ocasionalmente con la corporación, especialmente durante los veranos. Además, la RAND pagaba mucho mejor que cualquier universidad y abría el camino a integrarse en un grupo científico muy activo.

Nash era una estrella dentro del campo de la teoría de juegos y se sospechaba que esta rama incipiente de las matemáticas iba a desempeñar un papel fundamental dentro de la Guerra Fría. Lógicamente, la RAND se apresuró a hacerle una propuesta, y Nash, de reconocidas ideas conservadoras, la aceptó: más allá del sueldo, de la perspectiva científica y del reto en sí, creía decididamente en los principios ideológicos que animaban a la corporación.

Nash estuvo ligado a la RAND durante cuatro años y su forma de pensar se adaptó bastante bien a las líneas generales de la corporación. La idea principal de la RAND consistía en aplicar el análisis y los métodos cuantitativos a un hecho tan novedoso como que dos superpotencias poseyeran bombas nucleares capaces de destruir el planeta. Para estos fines, atrajo a los mejores matemáticos, físicos, economistas y sociólogos que pudo; todo ello, sin necesidad de que se integraran en las Fuerzas Armadas, lo que hubiera sido impensable para la mayoría de estos profesionales. Incluso la gran estrella de la teoría de juegos, John Von Neumann, colaboró con la corporación.

La RAND tenía la misión de diseñar la estrategia y, a la vez, procurar materializarla. En esta tarea contaba con la colaboración de los mejores ingenieros, capaces de diseñar y construir las armas que requería la estrategia decidida. Aunque la época de máximo esplendor de la corporación abarcó la década de 1950, período en el que sus ideas determinaron la defensa estadounidense, su influencia se dejó sentir hasta el final del siglo XX.

La corporación tenía acceso a los mayores secretos militares, por lo que la seguridad fue una de sus máximas prioridades. En el ambiente flotaba una cierta psicosis sobre las filtraciones y los espías, generada desde el robo soviético de los secretos atómicos y avivada por las indagaciones del Comité de Actividades Antiamericanas, descalificadas desde diversos sectores como una «caza de brujas». El exceso de celo del senador Joseph McCarthy (1908-1957), cabeza visible de dicho comité, arruinó la vida de varios inocentes, lo que le valió ser defenestrado. No obstante, se supo con posterioridad que la penetración soviética había superado con creces las denuncias del senador; de hecho, había alcanzado incluso a los más altos estamentos gubernamentales y científicos, ante la incompetencia manifiesta de la CIA.

Nash nunca llegó a tener autorización para acceder a los documentos secretos que se consideraban vitales, lo que induce a pensar que el interés que tenía la RAND por él se limitaba a sus desarrollos teóricos, especialmente en teoría de juegos. En este sentido, Nash no solo había llamado la atención por su aportación sobre los puntos de equilibrio en los juegos no cooperativos —lo que se adaptaba bastante bien a la situación de escalada armamentística emprendida por la Unión Soviética y Estados Unidos—, sino que también interesaban, y mucho, las ideas que tenía sobre la negociación y el modo óptimo de llegar a acuerdos en situaciones de conflicto.

## LA TEORÍA Y LOS JUEGOS DE NEGOCIACIÓN

Casi de forma simultánea a su tesis doctoral, Nash publicó un trabajo sobre la teoría de las negociaciones en la revista *Econometrica*, que continúa siendo una publicación de referencia para las matemáticas aplicadas a la economía. El artículo se tituló «The Bargaining Problem» (1950) —«El problema de la negociación»—, y en él Nash volvió a apartarse radicalmente de la teoría económica ortodoxa, que consideraba indeterminados los problemas de negociación. En cambio, asumió que la negociación entre agentes racionales conduce a un único resultado y lo determina imponiéndole al modelo ciertas condiciones deseables. La formulación de Nash del problema y su solución constituyen el fundamento de la teoría moderna de la negociación.

Los juegos de negociación se refieren a situaciones en las que dos o más partes deben alcanzar un acuerdo acerca de cómo repartirse un determinado objeto o cantidad monetaria. En estos juegos, cada jugador prefiere alcanzar un acuerdo que no hacerlo; pero, a su vez, prefiere el acuerdo más favorable desde su punto de vista. Existen numerosos ejemplos de tales situaciones, como la negociación entre un sindicato y los empresarios de una compañía acerca del incremento salarial, o la disputa entre dos comunidades sobre la repartición de un territorio común; incluso las condiciones bajo las cuales dos países pueden iniciar un programa de desarme nuclear. El análisis de este tipo de problemas busca, en primera instancia, una solución en la cual se especifique la fracción del objeto de la negociación que le corresponde a cada parte negociante.

Los problemas de negociación han estado presentes en la teoría económica desde finales del siglo XIX, cuando se analizaban los posibles acuerdos a los cuales podrían llegar partes con un significativo poder de mercado. Sin embargo, el análisis de problemas de negociación trasciende del plano netamente económico y se inserta en el análisis de tipo matemático.

El economista irlandés Francis Ysidro Edgeworth (1845-1926) fue el primero que afrontó el problema de elegir un punto —asignación— en la curva de contrato, y estableció que otros factores adicionales a los que ya incluía el modelo establecido deberían incidir en la llegada de acuerdos negociados. Estos factores son dos:

1. Racionalidad individual: nadie negociará por menos de cierto pago mínimo, llamado «punto de desacuerdo».

2. Racionalidad conjunta: nadie llegará a un acuerdo si existe un pago conjunto posible que es mejor que el que se está proponiendo.

Edgeworth, no obstante, tuvo que admitir que con su enfoque el problema de la negociación era indeterminado, y que no podía hallar una solución racional. Ni siquiera Von Neumann y Morgenstern, en su obra de referencia, fueron más allá de la teoría de negociación de Edgeworth. Aun así, su aportación conjunta resultó importante de forma indirecta para la teoría de la negociación, puesto que ambos desarrollaron herramientas útiles para diversos avances posteriores, como los conceptos de estrategia y función de pago. En particular, el concepto de función de pago de Von Neumann y Morgenstern fue una formulación rigurosa que permitía el estudio formal del concepto de riesgo.

## LAS CUATRO PROPIEDADES DESEABLES

Una vez más, el primero en definir un problema básico formal de negociación fue Nash, que lo entendió como un conjunto de posibles asignaciones de utilidad; para ello, se basó en las ideas de Von Neumann y Morgenstern. En 1950, en vez de empezar por definir una solución y luego estudiar la manera de calcularla, Nash comenzó por definir qué condiciones habría de verificar cualquier solución razonable, y a partir de ahí, analizar la solución a la que llegaba y si esta existía siempre. Para buscar una solución al problema de negociación, estableció una serie de axiomas o propiedades deseables que debería satisfacer tal solución y posteriormente procedió a definirla. En este contexto, una solución de negociación es una regla de asignación de utilidades aplicable a cualquier problema de negociación. Las propiedades deseables que satisface la solución de negociación de Nash son las siguientes:

a) Eficiencia. Las soluciones de negociación de Nash agotan todas las oportunidades de mejorar las ganancias de ambos jugadores.



b) Simetría. Si el cambio de un jugador por otro no cambia el problema de negociación, en la solución ellos deben obtener lo mismo.

c) Invarianza. La solución no puede depender, en modo alguno, de las unidades arbitrarias en las que se midan los beneficios de la negociación.

d) Independencia de alternativas irrelevantes. Es la hipótesis más sutil: el resultado de una negociación no puede depender de alternativas de negociación que los negociadores no escogen aunque pudieran hacerlo.

El concepto de eficiencia que introdujo Nash estaba relacionado con el que ya definió el matemático italiano Vilfredo Pareto (1848-1923) en su obra *Curso de economía política* (1897). Según Pareto, un sistema económico estaba en equilibrio si cualquier cambio que beneficiara a uno de los agentes del sistema perjudicara a otro. Este concepto de eficiencia también subyace en la definición de Nash de punto de equilibrio en los juegos no cooperativos. Es decir, un sistema no está en equilibrio, y por tanto va a tender a cambiar, si hay alguna manera de que todos los que intervienen salgan beneficiados a la vez. Para Nash, una negociación no será aceptable hasta que llegue a un punto de equilibrio.

Por su parte, el axioma de simetría establece que si la posición de las partes en la negociación es idéntica —en cuanto a su aversión al riesgo, información disponible, etcétera—, y en el desacuerdo son tratadas de la misma manera, entonces deben recibir lo mismo en la solución.

En cuanto al axioma de invarianza, establece que cualquier transformación en las unidades de medida no cambia el problema. Por último, el axioma de independencia de alternativas irrelevantes establece que la elección de una asignación de utilidades no debe depender de asignaciones que, siendo factibles, no fueron elegidas. Lo que significa que las alternativas irrelevantes pueden suprimirse al principio del problema haciéndolo más simple, sin que la solución varíe.

## PENALIZACIÓN A QUIEN TEME EL RIESGO

Es importante destacar que en juegos donde se presenta asimetría en el poder de negociación de las partes, la solución de Nash de negociación penaliza al jugador que siente más aversión al riesgo. Dicha aversión se puede medir con las herramientas proporcionadas por Von Neumann y Morgensten. El sentido de este resultado se encuentra en el hecho de que en la medida en que un jugador sea más contrario al riesgo, menor será su deseo de exigir una parte significativa del objeto de negociación, dado que este conlleva una probabilidad positiva de que la negociación fracase. Por ello, tal jugador estaría seguramente muy dispuesto a hacer importantes concesiones con tal de evitar el desacuerdo.

En el libro *Teoría de juegos y conducta económica* se establecen procedimientos para construir la función de riesgo de cada interviniente en el juego. Se trata de elecciones entre una cantidad fija segura y una lotería en la que las recompensas están por encima y por debajo de esa cantidad. La aversión se mide preguntando al decisor, que es la persona que decide la estrategia, qué valores han de tener las probabilidades para que las dos alternativas sean equivalentes. A partir de este tipo de pruebas sencillas se puede establecer una función de riesgo personal. Si hay un jugador con gusto por el riesgo, este sí estaría dispuesto a asumir riesgos considerables —como exigir una fracción considerable del objeto negociado— en lugar de conformarse con una ganancia pequeña, incluso a riesgo de que la negociación fracase.

La idea de Nash es que el reparto no ha de ser justo, sino que se define por la fuerza que cada uno de los jugadores pueda ejercer en la negociación. A partir de este planteamiento se puede enunciar el teorema de negociación de Nash: «La solución de Nash es la única que satisface las propiedades a), b), c) y d) enunciadas anteriormente en un modelo de negociación».

Otros desarrollos en esta misma dirección han incluido algún tipo de asimetría adicional al juego, como la información disponible a cada jugador o algún otro tipo de poder de negociación exógeno. En general, los resultados siguen siendo similares: la solución Nash de negociación penaliza al jugador con mayor aversión al riesgo y, en caso de que se presenten asimetrías de información, penaliza al jugador con una menor cantidad de información. El planteamiento del problema por parte de Nash y la solución ofrecida han generado un amplio campo de investigación en la interpretación y validez de los axiomas, así como en la formulación de otras soluciones satisfaciendo propiedades diferentes.

Aunque el problema de la negociación fue publicado por Nash de forma simultánea a la lectura de su tesis doctoral, él mismo explicó que las ideas se le ocurrieron con anterioridad a los resultados de su tesis. Así lo reflejaría en su nota biográfica, redactada con motivo del premio Nobel: «Como resultado de esa exposición de ideas y problemas económicos, llegué a la idea que produjo el texto de "El problema de la negociación", que más tarde se publicó en *Econometrica*; y fue aquella idea la que, a su vez, cuando cursaba el doctorado en Princeton, condujo mi interés hacia los estudios de teoría de juegos que se desarrollaban allí».

## UN EQUILIBRIO ESTABLE A BASE DE AMENAZAS ÓPTIMAS

Desde el principio de su colaboración con la RAND, Nash demostró una personalidad atípica: no saludaba a los conocidos y paseaba por los pasillos rumiando sus pensamientos, aunque no consta que siguiera silbando de modo obsesivo piezas de Bach. Según los testimonios de aquel período, la única forma de contactar con él era proponerle un problema que suscitara su interés y demostrarle que el interlocutor era un matemático competente.

En general, su técnica de trabajo continuaba siendo bastante original. Cuando un matemático aborda un problema, la primera parte del trabajo se centra en buscar toda la bibliografía que existe sobre la cuestión. A partir de ahí, se estudian las posibles mejoras y se verifica qué partes el trabajo habían quedado encalladas y si se pueden aportar nuevas y mejores soluciones. Pues bien, Nash se saltaba la primera parte: nada de bibliografía. Al afrontar un problema no quería saber qué se conocía sobre la cuestión, sino que prefería abordarlo como nuevo, desde el principio. Evitaba los recorridos que ya habían realizado otros matemáticos y quería tener solo

sus propias ideas sobre la cuestión. Esta técnica, que le aseguraba encontrar caminos nuevos y no trillados, requería de una gran confianza en sí mismo. Nash creía que nada de lo que hay escrito sobre una cuestión puede ser mejor que lo que uno piensa por sí mismo; y en ello, evidentemente, también había algo de arrogancia. Por descontado, la actitud de Nash le hizo ganar fama de matemático algo loco, que por otra parte es una de las pocas ideas que la gente está dispuesta a aceptar. La única persona con la que mantuvo una relación parecida a la camaradería fue Lloyd Shapley (1923-2016). Ambos fueron los dos mejores matemáticos de teoría de juegos de su generación. Curiosamente, Shapley también sería galardonado con el Nobel de Economía, en el año 2012.

Nash aportó a la RAND una visión nueva sobre la teoría de juegos. Su concepto de equilibrio era mucho más general que las soluciones dadas por Von Neumann y Morgenstern en *Teoría de juegos y conducta económica*, ya que se podía aplicar a juegos con muchos jugadores, no necesitaba que fuesen de suma nula y, lo mejor de todo: no tenían que ser juegos cooperativos. Esta última cuestión resultó especialmente interesante para los militares, pues no hay nada menos cooperativo que una guerra. Nash colaboró con Shapley en la RAND y perfeccionó su modelo de juego de negociación para hacerlo más general. En su primera aproximación, Nash ya había definido unos axiomas racionales sobre la negociación y a partir de ahí llegaba a la solución. Ahora, quería introducir una nueva variable en el problema: la capacidad de amenazar a cualquiera de las otras partes en el conflicto.

Para ello diseñó una negociación que comprendía cuatro etapas o fases. En la primera, cada jugador elige cuál será su actuación si no logra llegar a un acuerdo; eso es lo que constituye una amenaza desde el punto de vista matemático. En la segunda, se informan mutuamente de estas amenazas, para que el resto pueda evaluarlas. En la tercera, cada jugador escoge un resultado que sea aceptable para aprobar la negociación. En la cuarta, si todos consiguen su exigencia mínima, hay acuerdo; en otro caso, hay que ejecutar las amenazas. En este planteamiento hay infinitos puntos de equilibrio de Nash, pero él mismo demostró que existe un único equilibrio estable, que coincide con la solución axiomática que había hallado en su anterior trabajo sobre negociación. Probó que cada jugador tenía la posibilidad de encontrar la amenaza óptima que obligaba a los demás a llegar a un acuerdo, que era el punto de equilibrio. De nuevo, consiguió publicar esta versión extendida de su trabajo sobre negociación en la revista *Econometrica*.

La repercusión de este nuevo trabajo también fue notable. Un buen ejemplo para describir el impacto puramente mercantil de las teorías de Nash tendría lugar en 1994, en lo que se denominó «la mayor subasta de la historia», por la que el Gobierno de Estados Unidos vendió una buena parte de su espacio radioeléctrico para uso comercial. El procedimiento empleado fue ideado por diversos expertos en la teoría de juegos, que al efecto aplicaron a las subastas los conocimientos extraídos de los trabajos de Nash. Su objetivo fue doble: maximizar, a la vez, la ganancia para el Estado y la de los compradores de licencias. Con todo ello, el resultado de la subasta, que consistió en unas rondas sucesivas de pujas, constituyó un éxito rotundo: no solo el Estado recaudó diez mil millones de dólares, sino que también se aseguró una eficiente asignación de licencias, lo que garantizó que los inversores pudieran recuperar su inversión y hacer interesantes negocios.

## EL REVÉS DE PRINCETON Y EL MIEDO A LA GUERRA

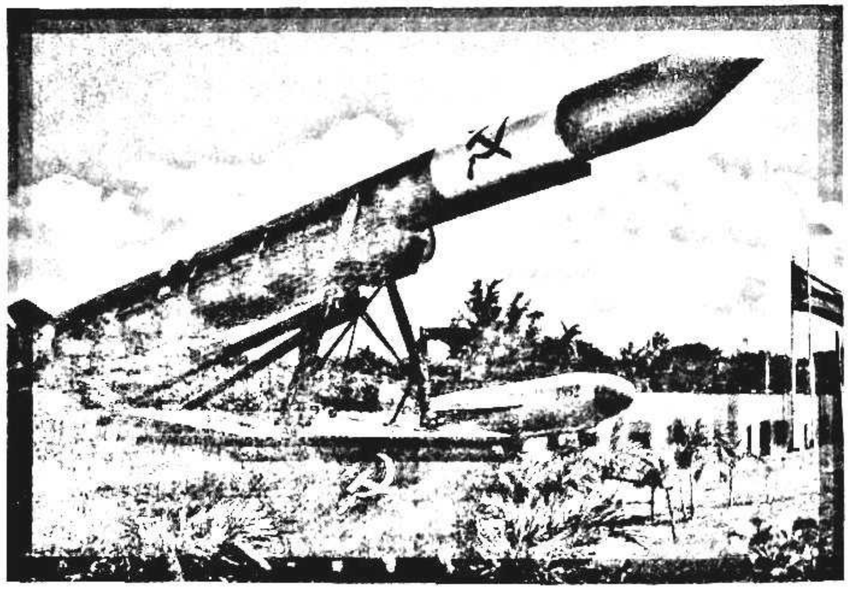
A pesar de sus aportaciones, Nash nunca se integró por completo en la RAND. Nadie cuestionaba su valía, pero se le consideraba un cuerpo extraño dentro del espíritu de camaradería que quería implantar la Fuerza Aérea. Así que, solo un año después de haber empezado su colaboración, decidió reincorporarse a Princeton a tiempo completo, con la esperanza de conseguir un puesto fijo de profesor. Además, quería sentirse libre en sus investigaciones matemáticas, y no trabajar solo en lo que interesaba a los militares. Al finalizar el año 1950 y tras publicar su tesis y los dos trabajos acerca del problema de la negociación, Nash no volvió a dedicar más tiempo a la teoría de juegos; por lo menos, de forma productiva, es decir, que sus avances se tradujeran en publicaciones.

### LA TEORÍA DE LA NEGOCIACIÓN Y LA «CRISIS DE LOS MISILES»

El mundo pareció abocado a una catástrofe nuclear cuando la CIA descubrió, el 14 de octubre de 1962, que los soviéticos tenían bases de misiles nucleares en Cuba, pero el análisis de los hechos bajo la teoría de la negociación de Nash ofrece una perspectiva diferente. Así, había un conflicto que requería negociación y, en un primer paso, Estados Unidos y la Unión Soviética definieron sus amenazas. El siguiente paso fue comunicarlas al enemigo: Estados Unidos dijo que no quería misiles apuntando a su territorio y amenazó con un bloqueo marítimo y destruir las bases; la Unión Soviética advirtió que atacar Cuba sería como atacarla a ella. Ambos jugadores cumplieron la fase dos de la teoría de la negociación esgrimiendo la guerra nuclear. Entonces, la Unión Soviética paró los barcos con suministros para dar tiempo a la tercera fase de la negociación, donde cada parte expone el resultado aceptable. Estados Unidos aceptó negociar si se retiraban los misiles. La Unión Soviética accedió exigiendo lo mismo: que ningún misil de Estados Unidos o sus aliados apuntara a su territorio.

**El desenlace previsto por Nash**

La cuarta fase fue inmediata: el 28 de octubre se acordó la retirada de los misiles de Cuba y la de los misiles que en Turquía e Italia apuntaban a la Unión Soviética. Además, Estados Unidos renunció a acabar por la fuerza con el régimen cubano. Con ciertos matices, el proceso de negociación previsto por Nash se llevó a cabo con éxito: ambos contendientes usaron la amenaza que les garantizaba el acuerdo y hallaron un punto de equilibrio.



Exhibición en 2012 de los misiles antitanque soviéticos desplegados en Cuba en 1962.



Su mentor, Tucker, le ayudó en la vuelta a Princeton y se encargó de garantizarle unos ingresos económicos que avalaran su estancia en la universidad mientras conseguía una plaza estable. Así, Nash empezó a dar clases de análisis matemático a estudiantes no licenciados y también se integró en un proyecto dirigido por el propio Tucker y financiado por la Oficina de Estrategia Naval. Este fue el camino que se trazó para sí mismo, pero frente a ello apareció una amenaza perturbadora: por su edad, estaba en disposición de ser reclutado para la Guerra de Corea. Afortunadamente, la Universidad de Princeton, la Marina de guerra y la RAND aseguraron que era indispensable para la defensa nacional y el peso de estos apoyos fue suficiente para librarle de ir a la guerra. Sin embargo, todo este asunto le produjo una gran tensión emocional: él mismo, posteriormente, achacó en parte sus primeros problemas mentales a la angustia vivida durante aquellas jornadas de incertidumbre. Otra consecuencia de aquel episodio fue que acordó con la RAND volver a colaborar en los siguientes veranos.

Los trabajos en teoría de juegos no consiguieron que Nash ganara una plaza estable como profesor en Princeton. Los matemáticos más consolidados de la universidad estimaron que las aportaciones de Nash no tenían demasiado valor científico. En general, la teoría de juegos se consideraba una moda que pasaría sin dejar demasiada huella en el cuerpo de las matemáticas. De hecho, el propio Nash albergó bastantes dudas de que sus ideas fuesen aceptadas como tesis doctoral. Como precaución ante esta eventualidad, y de manera simultánea, Nash enfocó otro camino matemático y empezó a trabajar en variedades, por si debía contar con una alternativa para su tesis. Como se verá más adelante, esta senda paralela también daría grandes frutos.

Lo cierto es que incluso dentro del departamento de matemáticas de Princeton imperaba una cierta sensación de decepción respecto al joven Nash. Se esperaba de quien había encontrado una demostración alternativa al teorema de Gauss que se consagrara a abordar problemas teóricos más profundos, y no realizar meras aportaciones a una teoría matemática de tipo aplicada. Su carácter, por supuesto, no ayudaba, como tampoco lo hicieron las clases que había dado como profesor de análisis matemático. El

responsable del programa expresó su disgusto porque Nash era una persona de difícil trato, soberbia y maniática que mantenía una relación francamente mala con sus estudiantes, por lo que desaconsejó que se le contratara de manera estable. El departamento de matemáticas de Princeton, además, era relativamente pequeño y solo tenía capacidad para contratar a profesores en circunstancias muy concretas, que en el caso de Nash no se daban.

## EL «PROFESOR NIÑO» DESLUMBRA CON SU TEOREMA SOBRE VARIEDADES

Nash, contrariado por no lograr su plaza estable en Princeton, buscó otras vías y recibió ofertas de la Universidad de Chicago y del Instituto Tecnológico de Massachusetts, más conocido como MIT por sus siglas en inglés. Esta última fue la que finalmente aceptó. Dado que el MIT no era en aquel momento la prestigiosa institución que es en la actualidad, se podría decir que había bajado de categoría científica.

El MIT había ofrecido el contrato a Nash para reforzar su endeble departamento de matemáticas, e hizo lo propio con el departamento de física atrayendo a los grandes científicos que habían trabajado en Los Álamos en la construcción de la bomba atómica y además se habían percatado de la importancia de la informática y las ciencias de la computación. En sí, el departamento de matemáticas solo contaba con una persona de reconocido prestigio mundial: el profesor estadounidense Norbert Wiener (1894-1964), que se había doctorado en Harvard y había trabajado en las universidades más importantes del mundo. Además de matemáticas, había estudiado filosofía y biología y era uno de los mayores entendidos en informática, tema que le interesaba de manera sobresaliente y le llevaría a ser el padre de la cibernética. Wiener, que tenía un carácter muy peculiar y alternaba períodos de depresión con otros de gran excitabilidad, acogió con entusiasmo a Nash. De hecho, su opinión fue clave para que se le ofreciera un puesto allí. Sin embargo, Nash se sentiría mucho más cercano a otro notable



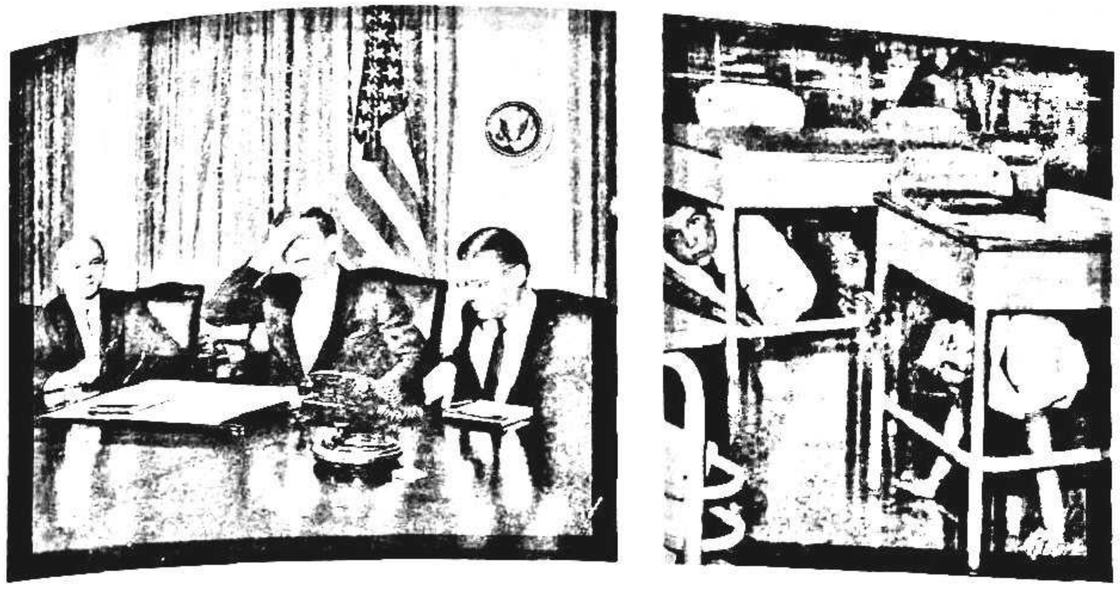


FOTO SUPERIOR IZQUIERDA.
**El presidente estadounidense John F. Kennedy negoció con éxito la «crisis de los misiles» junto a sus secretarios de Estado y Defensa: Dean Rusk, a su izquierda, y Robert McNamara.**

FOTO SUPERIOR DERECHA.
**Colegiales en Brooklyn durante un ejercicio de simulación en caso de ataque nuclear (1962).**

FOTO INFERIOR:
**Ensayo nuclear estadounidense en el atolón de Bikini, en las islas Marshall (1946). La pavorosa imagen de la bomba atómica alentó todo los temores de la Guerra Fría.**

matemático, Norman Levinson (1912-1975), que ejercería como su mentor y referente, tal y como Tucker había hecho en Princeton.

«Estaba pensando sobre un problema, trataba de llegar a alguna parte, y no podía. Fui a dormir y soñé que encontraba a Nash, se lo contaba y me daba la respuesta. Le di crédito cuando finalmente la plasmé en papel. No era mi solución. No pude hacerla por mí mismo.»

— DONALD J. NEWMAN, AMIGO DE NASH.

En 1951, Nash, con solo veintitrés años, comenzó a dar clases en el MIT y pronto se ganó un apelativo entre los estudiantes: el «profesor niño», por su aspecto juvenil, que evidenciaba su inexperiencia. Como puede intuirse, no fue un profesor ortodoxo y casi nunca preparó un guion elaborado de sus clases, que a menudo fueron desordenadas. Para colmo, el nivel de sus exámenes estaba muy por encima de lo exigible a alumnos que estaban en cursos de iniciación a las matemáticas superiores. La arrogancia de Nash halló un campo abonado en el MIT, donde el nivel de investigación era claramente inferior al de Princeton. Se consideraba a sí mismo un genio de las matemáticas, a lo que daba excesiva publicidad; y no encontraba a nadie, salvo quizá Wiener o Levinson, que pudiese estar a su altura. Lo curioso es que esto sucedía antes de haber publicado sus trabajos sobre variedades, cuyo éxito sí refrendó la percepción general de que su valía matemática era muy elevada.

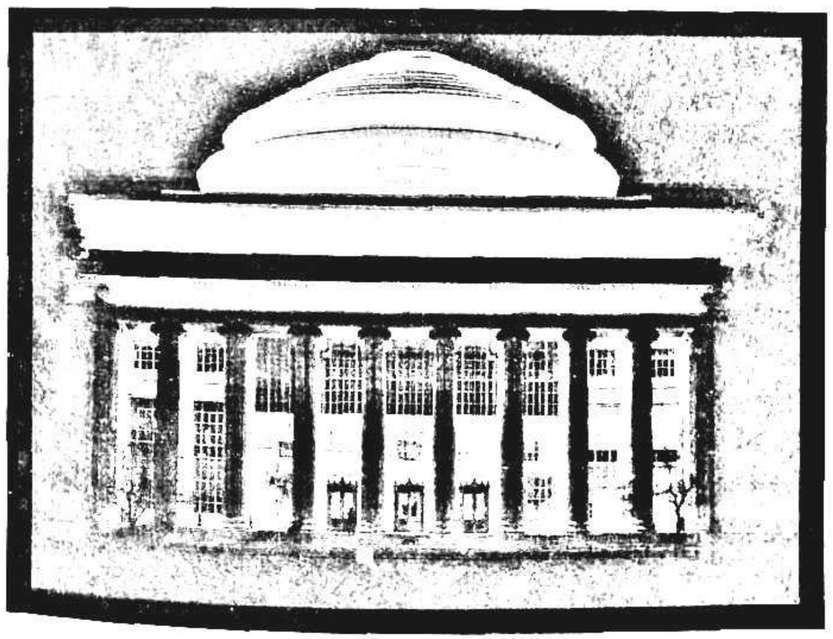
## SOBRE LOS ESPACIOS EUCLÍDEOS

El siguiente gran hallazgo de Nash tuvo que ver con las variedades, unos objetos matemáticos que habían llamado poderosamente la atención de los expertos. Se trataba de una nueva forma de mirar el mundo y encontrar relaciones entre objetos geométricos que a simple vista parecían muy distintos. Las variedades se definían a partir de subconjuntos de espacios euclídeos. El primer paso para



### INSTITUTO TECNOLÓGICO DE MASSACHUSETTS

El Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT) es una universidad privada emplazada en la localidad de Cambridge, Massachusetts (Estados Unidos). Su fundación, en 1861, obedeció al rápido desarrollo industrial de la nación y se estableció en el marco de una universidad politécnica orientada especialmente a las ciencias aplicadas y con una estrecha cooperación con la industria. El campus abrió sus puertas en 1916, pero fueron las reformas curriculares de 1930, que hicieron hincapié en la investigación científica básica, las que propiciaron que cuatro años más tarde el MIT fuera aceptado en la Asociación de Universidades de América. La investigación en materia de defensa durante la posguerra contribuyó a la rápida expansión del Instituto y de su campus bajo el mandato de James Killian (1904-1988). En los últimos 60 años, las disciplinas educativas del MIT se han expandido más allá de la física y la ingeniería, en campos tales como biología, economía, lingüística y administración. El MIT tiene una fuerte cultura empresarial: de hecho, la suma de los ingresos de las empresas fundadas por antiguos alumnos situarían al Instituto como la undécima economía más grande del mundo. Entre sus egresados no solo se cuentan varios premios Nobel, entre ellos el economista Paul Krugman y los físicos Richard Feynman (1918-1988) y Murray Gell-Mann, sino también destacados políticos, como Kofi Annan, secretario general de la ONU entre 1997 y 2006, y Benjamin Netanyahu, primer ministro de Israel.



**Vista desde el campus de la bella cúpula del MIT, una de las señas de identidad del centro.**

entenderlas será aclarar qué es un espacio euclídeo en matemáticas. A lo largo de los siglos se consideró que Euclides había definido en su libro *Elementos* toda la geometría que se podía hacer, por lo que salirse de sus postulados constituía casi una herejía matemática.

Euclides había presentado su geometría a partir de unos postulados que él consideraba axiomas. En matemáticas, los axiomas son verdades evidentes que no necesitan demostración. Para su construcción, Euclides planteó cinco postulados, basados en sus definiciones básicas de punto, plano, recta, etcétera, y asumió que todos ellos eran evidentes y no requerían demostración. Así se aceptó a lo largo de la historia, a tal punto que Kant, en su *Crítica de la razón pura*, llegó a sentenciar que los conceptos de Euclides eran un componente esencial de nuestra visión del mundo.

En los espacios euclídeos es posible definir una distancia entre puntos, lo que se corresponde con el concepto de distancia que todo el mundo tiene de manera intuitiva, ya que en los espacios euclídeos se cumple ese aserto tan famoso que dice que la línea recta es la menor distancia entre dos puntos. En realidad, debería decirse que el segmento es la distancia más corta entre dos puntos, porque la línea por definición es infinita.

Así, dados $x_1 = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n})$ y $x_2 = (x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n})$, dos puntos de un espacio euclídeo $R^n$ de $n$ dimensiones, se define la distancia entre $x_1$ y $x_2$, notada por $d(x_1, x_2)$, como:

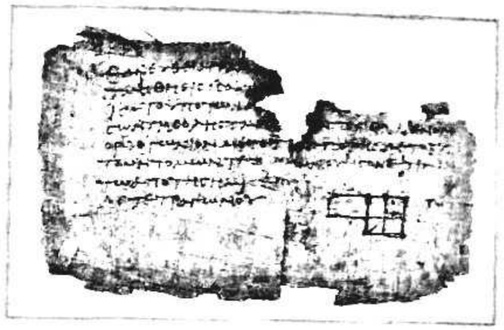
$$d(x_1,x_2) = \sqrt{(x_{11}-x_{21})^2 + (x_{12}-x_{22})^2 + \cdots + (x_{1n}-x_{2n})^2}$$

Es fácil ver que si se quiere calcular la distancia entre los puntos del plano $(0,0)$ y $(1,1) \in R^2$, vale raíz de 2, dado que $d((0,0),(1,1)) = \sqrt[2]{1^2+1^2}$. La distancia euclídea es la más natural para los espacios euclídeos. En el ejemplo anterior habría bastado aplicar el teorema de Pitágoras para saber que la distancia es $\sqrt{2}$. Eso no significa que sea la única que puede definirse. Para poder tener una distancia en un conjunto A cualquiera se ha de tener una función $d$: $AxA \mapsto R$, de modo que verifique las siguientes propiedades:

1. $d(x,y) \geq 0$, para todo $x, y \in A$ y $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. $d(x,y) = d(y,x)$, para todo $x, y \in A$. Propiedad simétrica.
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$, para todo $x, y, z \in A$.



**EUCLIDES**



Fragmento en papiro de *Elementos*.

Poco se sabe de la vida del matemático y geómetra griego Euclides (325-265 a.C.), más allá de que residió en la localidad egipcia de Alejandría bajo el reinado de Ptolomeo I. En *Elementos*, una de las obras científicas más conocidas, recopiló el conocimiento impartido en el medio académico y lo presentó de manera formal, partiendo tan solo de cinco postulados basados en el estudio de las propiedades de líneas y planos, círculos y esferas, triángulos y conos, etcétera; es decir, de las formas regulares. Probablemente, ninguno de los resultados de *Elementos* fue demostrado por primera vez por Euclides, pero la organización del material y su exposición constituyeron un mérito y esfuerzo considerables. De hecho, existen evidencias de que empleó libros de texto anteriores, dado el gran número de definiciones que no son usadas, tales como la de un oblongo, un rombo y un romboide. Los teoremas más famosos que recogió Euclides son:

- La suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es 180°.
- En un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos, que es el famoso teorema de Pitágoras.

La geometría de Euclides, además de ser un poderoso instrumento de razonamiento deductivo, resultó extremadamente útil en muchos campos del conocimiento, como la física, la astronomía, la química y diversas ingenierías, y perduró sin variaciones hasta el siglo XIX, cuando Gauss, al no admitir el quinto de sus postulados, planteó algunos tipos de geometría no euclídea.

Los conjuntos dotados de una distancia se llaman espacios métricos. Obviamente, la distancia euclídea es una distancia, por lo que, salvo que se diga expresamente, se supondrá siempre que los espacios euclídeos son espacios métricos con esa distancia. Más adelante se verá que no todos los espacios son euclídeos y, por tanto, no verifican las propiedades referidas.

## EN EL TERRENO DE LAS VARIEDADES

El siguiente paso será definir una variedad. Así pues, una variedad es un conjunto $M$ de manera que exista una aplicación biyectiva $\varphi : U \mapsto M$, donde $U \subseteq R^n$ es llamado sistema global de coordenadas para $M$. $R^n$ es un espacio euclídeo de $n$ dimensiones.

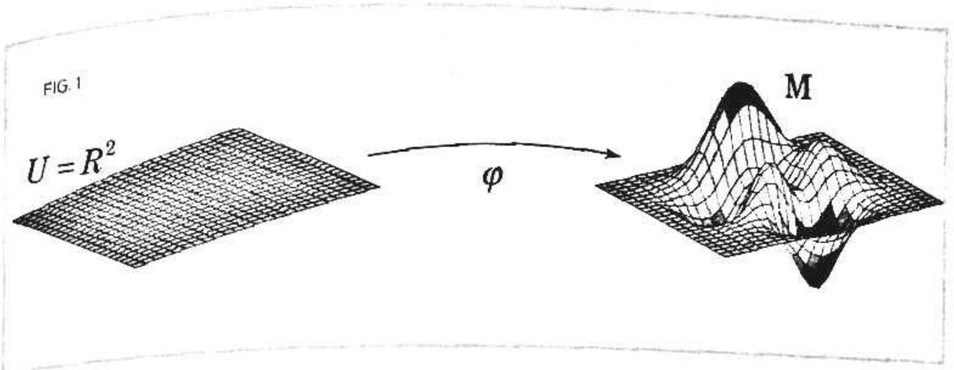
Para que $\varphi$ sea biyectiva, tienen que ocurrir dos cosas de forma simultánea. En primer lugar, que todo punto de $U$ tenga una sola imagen en $M$, y en segundo lugar, que dado cualquier punto $m \in M$ haya un único punto $u \in U$ cuya imagen sea m, es decir, $\varphi(u) = m$.

La variedad $M$ no tiene que estar en el mismo espacio que $U$. $U$ es un subconjunto de un espacio euclídeo, que en dimensión 2 es un plano, notado por $R^2$ y en dimensión 3, el espacio $R^3$. Aunque la imaginación humana no permite concebir ni imaginar espacios de más de tres dimensiones, los matemáticos no tienen ningún problema en tratar con espacios euclídeos de más dimensiones, que notan por $R^n$ en general, o incluso con infinitas dimensiones. Trabajar con ecuaciones de esos espacios no es mucho más difícultoso que hacerlo con las del plano o el espacio.

Considérese el ejemplo de variedad en el espacio $\varphi$ definida en $R^2$ que se plantea en la figura 1. La relación que se ha establecido en una variedad es la misma que existe entre un mapa y la parte de la Tierra que representa. El mapa está en un plano y, por tanto, es de dimensión 2, y lo que representa está en dimensión 3; pero cada punto del mapa señala un sitio real del territorio, y se puede señalar cada punto del terreno en el mapa sin ambigüedades. Existe, por lo tanto, una aplicación biyectiva entre el plano y la parte de terreno que representa. Esa es la relación que se necesita para tener una variedad, que en el caso del plano se trata de un trozo de la superficie terrestre.



FIG. 1




Algunas de las variedades estudiadas son muy comunes, como puede verse en los siguientes ejemplos. La banda o cinta de Möbius o Moebius, que se ilustra en la figura 2, es una superficie con una sola cara y un solo borde. Fue descubierta de forma independiente en 1858 por los matemáticos alemanes August Ferdinand Möbius (1790-1868) y Johan Benedict Listing (1808-1882). Para construir una cinta de Moebius, se toma una tira de papel y se pegan los extremos dando media vuelta a uno de ellos. Una de las cosas que llaman la atención es que es imposible pintar una de sus dos caras, porque no es orientable. Como $\varphi$ está definida desde $[0,2\pi] \times \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, que es un subconjunto del plano y toma valores en $R^3$.

Esta variedad es lo que se llama un «toro», como muestra la figura 3. Se trata de una superficie de revolución generada por una circunferencia que gira alrededor de una recta exterior. En otras palabras, la curva tridimensional que resulta de hacer girar una circunferencia alrededor de un eje que no la corta. Muchos objetos cotidianos tienen forma de toro: una rosquilla, la cámara de un neumático, etcétera. Como a la aplicación $\varphi$ no se le ha exigido ninguna condi-

FIG. 2

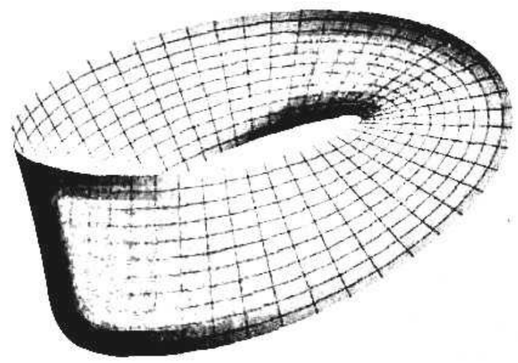
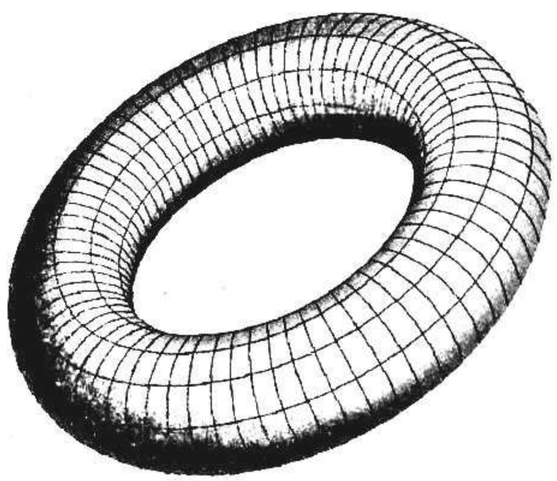


FIG. 3



ción, salvo que sea biyectiva, los objetos matemáticos que se pueden considerar como variedades son infinitos. Sin embargo, hay una posibilidad de clasificarlos: mediante la topología. De manera informal, se presenta a la topología como la «geometría del chicle», lo que hace referencia a que tiene diferencias con la geometría clásica o euclídea. En la geometría euclídea, dos objetos son equivalentes mientras se pueda transformar uno en otro empleando isometrías —rotaciones, traslaciones, reflexiones, etcétera—, es decir, mediante transformaciones que conservan las medidas de ángulo, área, longitud, volumen y otras. Por ejemplo, en un plano, que es un espacio euclídeo de dos dimensiones, un triángulo equilátero de 3 centímetros de lado será equivalente a otro triángulo solo si es equilátero y su lado mide 3 centímetros.

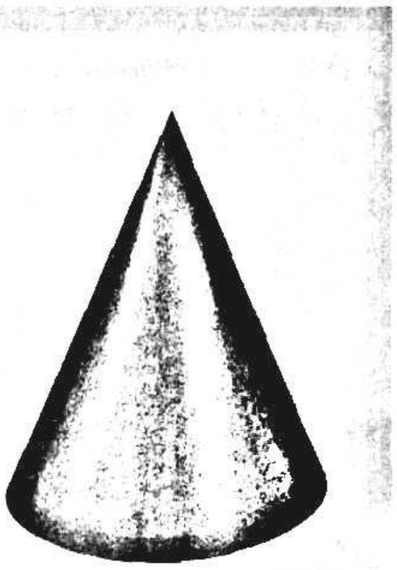
En topología, dos objetos son equivalentes en un sentido mucho más amplio. Han de tener el mismo número de trozos, huecos, intersecciones, etcétera. En topología está permitido doblar, estirar, encoger y retorcer los objetos, pero siempre que se haga sin romper ni separar lo que estaba unido, y tampoco se puede pegar lo que antes estaba separado. Por ejemplo, desde el punto de vista topológico, un triángulo es lo mismo que una circunferencia, ya que se puede transformar uno en otra de forma continua, sin romper ni pegar. Sin embargo, una circunferencia no es lo mismo que un segmento, ni siquiera en topología, ya que habría que partirla —o pegarla— por algún punto. Este ejemplo se verá más adelante de forma detallada con un tipo particular de variedades: las variedades algebraicas.

Dentro de las variedades están las denominadas «regulares», lo que en matemáticas supone que sean diferenciables. En geometría y topología, una variedad diferenciable es un tipo especial de variedad topológica, a la que se pueden extender las nociones de cálculo diferencial que normalmente se usan en $R^n$. Para entenderlo de manera intuitiva, se puede imaginar una variedad en el espacio de tres dimensiones que, además, puede tocarse. Para que sea diferenciable debe ser suave al tacto: no debe tener puntas que pinchen, ni aristas que puedan cortar. Un toro es un ejemplo claro de esta idea. Sin embargo, la cinta de Moebius presenta filos que impiden que sea suave y, por tanto, no es diferenciable en esos puntos.

Los puntos donde una variedad no es diferenciable se llaman singularidades. No todas las singularidades son del mismo tipo, y su clasificación también interesó a Nash, como se verá más adelante. Por ejemplo, el cono, representado en la figura 4, es diferenciable en todos sus puntos, salvo en la punta y en la circunferencia de la base, que es donde están las singularidades.

Tal y como se ha explicado, las variedades topológicas pueden ser muy distintas, basta con tener una función $\phi$ biyectiva. En los ejemplos del toro y la cinta de Moebius, además, se ha comprobado que aparecen funciones complejas, como los senos y cosenos, y que se puede introducir cualquier otra que se ocurra.

FIG. 4



## VARIEDADES ALGEBRAICAS

Sin embargo, existen variedades que son más simples de definir y manejar: las llamadas «variedades algebraicas». Están definidas por funciones polinómicas, que tienen una forma simple y son siempre derivables. En inglés, incluso, se usan palabras distintas para las variedades generales que se han descrito —*manifolds*— y

**FUNCIONES DIFERENCIABLES**

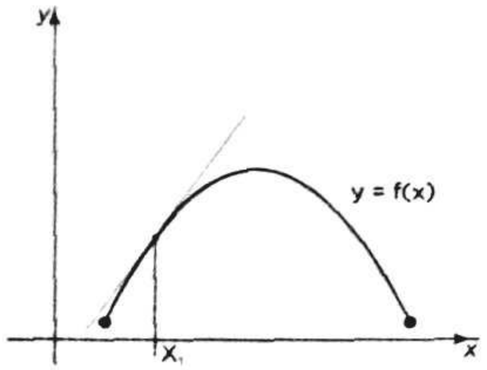
El concepto de derivada de una función real de variable real, $f: C \subseteq R \mapsto R$, se relaciona con la noción de límite. Así, la derivada se entiende como la variación que experimenta la función de forma instantánea, es decir, entre dos puntos de C muy próximos entre sí. Dada la función $f(x)$, se define como variación de la función entre dos puntos de su dominio $x_1$ y $x_2 \in C$, siendo $x_1 < x_2$, a la diferencia $f(x_2) - f(x_1)$. Cuando esta diferencia es positiva, la función es creciente; si es negativa, la función es decreciente. Relacionada con este concepto, se llama variación media de una función $f(x)$ en un intervalo $(x_1, x_2) \subseteq C$ al cociente siguiente:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Se trata de medir la intensidad de la variación de la función según los puntos escogidos. El valor de este cociente coincide con la pendiente de la recta que pasa por los puntos de coordenadas $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$. Para calcular la pendiente en el entorno de un punto se puede simplificar el valor de $x_2$ y expresarlo $x_2 = x_1 + h$, siendo h un valor infinitamente pequeño, y así poder definir la derivada en un punto $x_1$ como el límite de la pendiente de la función en ese punto:

$$f'(x_1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

La función derivada f' calcula la pendiente de la tangente de la función en el punto $x_1$.




La derivada no existe siempre, necesita que la función sea suave en el punto donde se deriva; por ejemplo, la función valor absoluto no es derivable en el 0. Este concepto de derivada para funciones reales de variable real se puede extender a otros espacios de más dimensiones.



las variedades algebraicas, que notan como *varieties*. Esta diferencia en los términos ayuda a comprender que son de una naturaleza distinta.

Las variedades algebraicas son las soluciones de las ecuaciones polinómicas. Algunas resultan tan simples como una línea recta en el plano:

$$\{(x,y) \in R^2 \text{ tales que } y=ax+b \text{ con } a,b \in R\}.$$

Considérese, ahora, la esfera de radio 1 (con centro en el origen de coordenadas (0,0,0)):

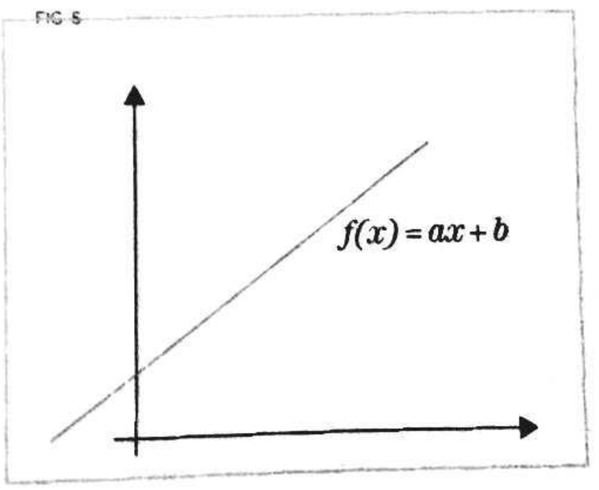
$$S = \left\{(x,y,z) \in R^3 \text{ tales que } x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$$

Es una variedad algebraica; de hecho, cualquier función polinómica igualada a un número real lo es. Resulta posible determinar una de las funciones $\varphi$ que la define como variedad. Para ello se le quita el punto que es extremo superior, de coordenadas (0,0,1), y se considera el plano tangente al extremo inferior de coordenadas (0,0,–1). La idea es proyectar cada punto de la esfera sobre el plano, como se mostrará en la figura 6. Al efecto, se toma un punto de la esfera y se traza una línea recta que una el extremo superior con este punto hasta cortar con el plano. Esto permite definir una aplicación biyectiva entre la esfera menos su polo norte y el plano considerado.

Además, se pone de manifiesto una de las paradojas de los conjuntos infinitos. La esfera tiene una superficie limitada o finita; de hecho, vale $4\pi$ unidades cuadradas. Sin embargo, presenta los mismos puntos que un plano infinito.

Como ya se explicó, dos variedades son equivalentes cuando se pueden estirar, doblar y llegar de una a otra. Eso es algo intuitivo, pero no una definición matemática.

FIG. 5

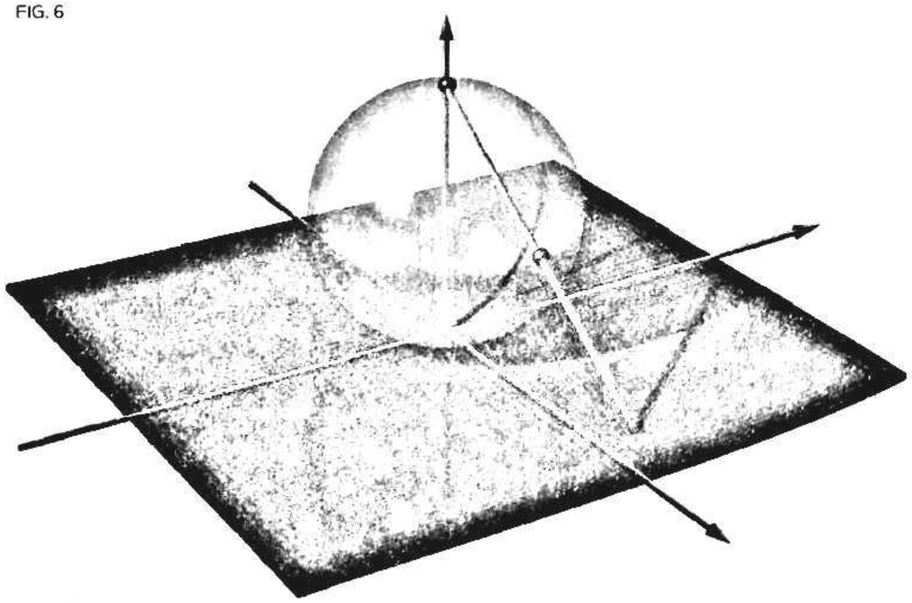


Las definiciones deben ser rigurosas y universales, no pueden depender de la habilidad que se tenga para doblar y manejar la variedad. Para relacionar dos variedades resulta preciso introducir el concepto de «difeomorfismo».

## QUÉ ES EL DIFEOMORFISMO

Para explicar el difeomorfismo se necesitan unos conceptos previos. Una aplicación entre dos conjuntos con una estructura algebraica es un homomorfismo si la aplicación conserva la estructura. Para tener una estructura algebraica se debe definir una operación interna en esos conjuntos. Una operación interna no es más que una aplicación que a cada par de puntos del conjunto le asocia un punto del mismo conjunto. Lo que normalmente se llaman operaciones aritméticas responde perfectamente a esta idea. Si se repara en la suma de números reales, ¿en qué consiste? Pues dados dos números reales $a,b \in R$, calcular $c \in R$, tal que $a+b=c$. Igual se puede decir de la multiplicación, pues se trata de calcular el producto de dos números reales, que obviamente es un número real. Así pues, el par $(R,+)$ tiene una estructura algebraica debido a que $R$ con la suma tiene una serie de propiedades:

FIG. 6





— Propiedad conmutativa: $a+b=b+a$ para todo $a,b \in R$.

— Propiedad asociativa: $a+(b+c)=(a+b)+c$ para todo $a$, $b$ y $c \in R$.

— Elemento neutro, que es el 0, pues $a+0=0+a=a$, para cada $a \in R$.

— Elemento inverso: dado $a \in R$, existe $-a \in R$, tal que $a-a=0$, que es el elemento neutro.

Por tener esas propiedades, se dice que el par $(R,+)$ es un grupo. Obviamente $R-\{0\}$ con el producto, $(R-\{0\},\cdot)$, también es un grupo, con 1 como elemento neutro y $1/a \in R$ como inverso para $a \in R-\{0\}$. Las propiedades conmutativa y asociativa son triviales.

Pues bien, un homomorfismo f entre los pares $(R,+)$ y $(R-\{0\},\cdot)$ es una aplicación que conserva las operaciones, o sea, $f(a+b)=f(a)\cdot f(b)$ para cada $a$, $b \in R$. A modo de ejemplo:

$$f:(R,+)\mapsto(R-\{0\},\cdot), \text{ definida como } f(a)=3^a$$

Obsérvese que $f(a+b)=3^{a+b}=3^a\,3^b=f(a)\cdot f(b)$, que es la definición de homomorfismo. Si el homomorfismo tiene una función inversa se puede hablar de isomorfismo. Por ejemplo, sea $R^+$ el conjunto de los números reales positivos y considérese el par $(R^+,\cdot)$, o sea, la operación interna considerada es el producto. Si se considera ahora el par anterior $(R,+)$ y también la función logaritmo: Log: $(R^+,\cdot)\mapsto(R^+,\cdot)$, se trata de un homomorfismo, dado que $\text{Log}(a+b)=\text{Log}\,a\cdot\text{Log}\,b$ y además para cada punto $a \in R^+$ existe un único punto $b \in R$, de manera que $\text{Log}\,b=a$, lo que significa que tiene función inversa. Si el logaritmo es neperiano en base $e$, basta tomar $b=e^a$. Así pues, hay un homomorfismo con función inversa y, por tanto, un isomorfismo. En caso de que la aplicación, como

su inversa, sean diferenciables, como es el caso propuesto, puede hablarse de difeomorfismo. La idea que subyace en la definición es que para que dos conjuntos sean difeomorfos han de tener una relación muy estrecha, es decir, ser muy parecidos no solo como conjuntos, sino como estructuras algebraicas, que es mucho más exigente. Por su parte, la idea general es que dos variedades son difeomorfas cuando tienen mucho en común. Una elipse y un círculo son difeomorfos; pero no lo son un intervalo y un círculo.

## LA SORPRENDENTE CONTRIBUCIÓN DE NASH

Con estos fundamentos ya es posible abordar el teorema de Nash que relaciona variedades y variedades algebraicas. Por un lado, las variedades son unos elementos matemáticos casi imposibles de catalogar, con muchas posibilidades en su construcción; basta con que $\phi$ sea biyectiva, pero puede tomar cualquier forma que se desee. Por otro, existen unas variedades algebraicas que son muy fáciles de entender, porque se definen a través de polinomios. Aparentemente no tienen nada en común, salvo que las variedades algebraicas son un caso particular, el más simple de las variedades generales.

Sin embargo, Nash pensó que no eran tan distintas y que una clase importante de variedades diferenciables, las compactas, eran difeomorfas a variedades algebraicas. Su idea fue sorprendente, ya que no tenía apariencia de veracidad. Se le ocurrió en Princeton y la discutió con un profesor visitante, Donald Clayton Spencer, un topólogo especialista que la encontró disparatada; pero la argumentación de Nash desmontó sus objeciones y le hizo replantearse que, en algunos aspectos, podía tener razón. En ese curso se vieron al menos dos veces por semana y Spencer pasó del escepticismo al respeto. Estas charlas ayudaron mucho a Nash para perfilar su resultado final, que conseguiría demostrar ya en el MIT.

El teorema de Nash dice que «dada cualquier variedad $M$ diferenciable y compacta en un espacio euclídeo de $k$ dimensiones (lo que notamos por $R^k$), existe una variedad algebraica V en $R^{2k+1}$ y un subconjunto $W$ de $V$, de modo que $W$ es una variedad diferenciable difeomórfica a $M$».



**DONALD CLAYTON SPENCER**

El matemático estadounidense Donald Clayton Spencer (1912-2001) se formó en la Universidad de Colorado y se doctoró en Cambridge con un trabajo sobre aproximaciones diofánticas. Más tarde impartió docencia en el Instituto Tecnológico de Massachussetts (MIT) y en las universidades de Stanford y Princeton, donde debatió con Nash acerca de las variedades. Entre sus trabajos destacaron las aportaciones en ecuaciones diferenciales y los estudios sobre la teoría de deformaciones de estructuras complejas de variedades en geometría diferencial. Su colaboración con el matemático japonés Kunihiko Kodaira (1915-1997) fructificó en la teoría de deformaciones Kodaira-Spencer, que versa sobre la deformación de estructuras complejas; juntos determinaron las funciones asociadas a ellas, que también llevan sus apellidos. Las conclusiones de Spencer influyeron ampliamente en la teoría de variedades complejas, la geometría algebraica y las ecuaciones diferenciales. A modo de curiosidad, el pico Spencer, en el cañón del Colorado, fue así llamado en su honor.

Se dice que un conjunto es compacto cuando es cerrado y acotado. Para ser cerrado tiene que contener a su frontera. El intervalo cerrado $[x, y]$ es cerrado porque incluyen a $x$ e $y$. Sin embargo, el intervalo abierto $(x, y)$ no lo es, ya que no incluye a los extremos $x$ e $y$, que son su frontera. El concepto acotado responde bien a la intuición, o sea, que no es ilimitado.

Finalmente, el artículo «Real Algebraic Manifolds» fue publicado en la prestigiosa revista *Annals of Mathematics* (1952). Nash conectó así una clase bastante general de variedades con las variedades de tipo algebraico y el resultado causó asombro. De hecho, cuando fue propuesto en 1969 como miembro de la Academia Nacional de Ciencias se citó el mérito de que hubiera demostrado ese teorema, pues «se había dado por supuesto que las variedades diferenciables eran objetos mucho más generales que las variedades algebraicas reales». Nash certificó con ello que era «un genio matemático», como le describió el profesor Duffin en la carta de recomendación para que entrara en la universidad. Él mismo se encargó de demostrar que aquella sentencia, tan escueta como elogiosa, solo respondía a la realidad.

CAPÍTULO 3

# Nash resuelve el reto de la inmersión

Las relaciones amorosas de Nash fueron simultáneas y polémicas, fruto de su peculiar carácter y ciertas carencias afectivas. Sin embargo, supo disociarlas de sus ambiciones matemáticas, que resultaron tan desmedidas como exitosas. En medio de esta ruleta emocional, y mientras se mantenía ajeno a las persecuciones políticas que sufrían otros, fue desafiado a resolver el reto de la inmersión o embebimiento de las variedades. Nash, en la cima de su talento, lo hizo.

No constituye ningún secreto que las relaciones sociales de Nash estuvieron bajo mínimos durante toda su etapa estudiantil y sus primeros años como profesor. Ensimismado en su mundo interior, no quiso crear lazos afectivos con las personas de su entorno laboral, y tampoco los estableció en su vida particular. Su carácter extravagante, así como la arrogancia y el distanciamiento que desplegaba frente a sus colegas, incluso con los estudiantes a su cargo, no le favorecieron en absoluto. En cualquier caso, Nash no fue popular, ni pretendía serlo.

Sin embargo, a la vez que su carrera despegaba y quizás animado por sus éxitos como matemático, Nash cambió repentinamente su manera de entender las relaciones personales y se abrió un poco más al mundo. Esta decisión, no obstante, se vio dificultada por su tenaz oposición a dejarse llevar por los sentimientos, fuera por la educación que recibió, su propia personalidad o una combinación de ambos factores. Nash siempre quiso tener el control de sí mismo y no dudó en mostrarse demasiado frío, o poco consciente de las necesidades de los demás, en incontables ocasiones. Para mantener dicho control, quiso y supo mantener compartimentadas todas sus relaciones de manera que no le perturbasen la vida; de hecho, optó por sostenerlas de manera simultánea, pues le molestaba tener que decidir por una u otra. Y todo ello, en medio de una frenética actividad mental.

La singular naturaleza de Nash, un hombre ajeno a las convenciones sociales, lastrado por su falta de empatía, inexperto en el trato y, sobre todo, embelesado con sus razonamientos matemáticos, afectó de forma notable a su manera de entablar relaciones con los demás. Por otra parte, en aquel momento era un joven físicamente atractivo y su inteligencia estaba fuera de toda duda, lo que al cabo le facilitó establecer los contactos que deseaba y atraer a las personas que suscitaban su interés.

Aunque nunca se consideró homosexual, es un hecho cierto que en esta primera etapa de su vida no tuvo muy claras sus preferencias. Al respecto, Nash negó su presunta homosexualidad en una amplia entrevista concedida en el año 2002, en la que zanjó la polémica con estas palabras: «He aprendido que es mejor que no hable sobre ello». Con ello, dejó entrever que hubo intentos por desacreditarle, sobre los que no quiso extenderse. Por su parte, la periodista estadounidense Sylvia Nasar, autora de la minuciosa biografía sobre Nash que inspiró la película *Una mente maravillosa*, ratificó que si bien Nash «mantuvo intensas relaciones emocionales con otros hombres cuando tenía veintitantos años, ninguna persona que entrevisté afirmó, y mucho menos aportó pruebas, de que Nash mantuviera en algún momento relaciones sexuales con otro hombre».

En cualquier caso, Nash trabó relaciones de carácter sentimental —o «especiales», como él mismo las denominaba— entre los años 1952 y 1957 con al menos dos hombres, a la par que mantuvo amores secretos con una joven que le dio un hijo, y establecía una relación de noviazgo, no exenta de altibajos, con la que terminaría siendo su esposa. Todo ello, en una etapa muy agitada, en la que comenzaba a labrarse el futuro y su cabeza bullía con frenesí, inmersa en desafíos matemáticos de difícil resolución.

La primera relación especial de la que se tiene constancia a través de cartas y declaraciones del propio Nash fue la que le unió con Ervin Thorson, un joven de origen escandinavo que trabajaba en la empresa aeronáutica Douglas Aircraft, colaboradora de la RAND. Probablemente, Thorson acusó los constantes y repentinos cambios de actitud de Nash, cuyo sentido del humor podía ser ácido y cortante, y la relación de amistad no se prolongó en el tiempo. De todas formas, Nash se refirió con afecto a Thorson en su correspondencia hasta finales de la década de 1960.



## UN TÓRRIDO ROMANCE Y UN HIJO INESPERADO

De lo que sí existe una certeza absoluta es de que Nash, con motivo de su ingreso en un hospital en septiembre de 1952 para operarse de unas venas varicosas, se quedó prendado de la enfermera que se ocupó de él: Eleanor Stier. Al recibir el alta, Nash puso mucho empeño en mantener el contacto con Eleanor, que era cinco años mayor que él, y la invitó a salir varias veces. Esta, igualmente atraída, le correspondió. Nash organizó entonces su agenda para verla con frecuencia sin que el romance interfiriera en su actividad prioritaria: avanzar en la solución del problema del embebimiento de variedades. Aunque su relación se fortaleció, la existencia de Eleanor era desconocida por todos, incluso por los colegas del MIT. La bomba estalló cuando, a finales de ese mismo año, Eleanor le comunicó que estaba embarazada.

Nash no reaccionó mal en un primer momento. De hecho, Eleanor contó que parecía complacido con la expectativa de ser padre; pero, en contra de sus deseos, la noticia no supuso ningún cambio en la relación. Lo que se podía esperar de cualquier persona conservadora, máxime si provenía de una familia de igual condición y extremadamente atenta a las costumbres sociales, no se cumplió con Nash, que en ningún momento se planteó casarse y formalizar el vínculo. Con ello, demostró que era tan tradicional como poco convencional, lo que dio la razón a su hermana Martha cuando aseguró que «era siempre diferente».

La relación no solo no prosperó como Eleanor esperaba, sino que Nash empezó a comportarse de manera desagradable con ella. Eleanor se sentía humillada cada vez que Nash le recordaba, y lo hacía con frecuencia, la gran diferencia intelectual que existía entre ellos. Él era un famoso profesor del MIT y le recalcaba que ella no estaba a su altura, ni en inteligencia ni socialmente; además, era mayor que él, lo que ahora consideraba un problema. El 19 de

junio de 1953, cuando Nash acababa de cumplir los veinticinco años de edad, Eleanor dio a luz a un niño, que recibió el nombre de John David Stier.

Nash acompañó a Eleanor en el hospital, pero se negó a que apareciera su nombre como padre en el certificado de nacimiento. Tampoco contribuyó a pagar la factura del parto. A finales de primavera, Eleanor se vio forzada a dejar su trabajo como enfermera y se instaló en un hogar para madres solteras; dadas las circunstancias, le costó mucho encontrar trabajo o un nuevo alojamiento. Desde el primer momento, Nash se desentendió de los gastos económicos y los problemas generados por su hijo, aunque solía visitarlo con frecuencia y parecía satisfecho con su compañía. Mientras, Eleanor, sin apenas recursos, se vio obligada a buscar familias que acogieran al niño de forma temporal, sin que Nash interviniera en forma alguna.

La eterna falta de empatía y capacidad del joven matemático para entender los sentimientos ajenos generó el rechazo y el rencor de Eleanor, que sufrió mucho separada de su hijo. A pesar de todo, la pareja no rompió y conservó un cierto vínculo, que se mantuvo prácticamente secreto. Durante los años que duró esta tortuosa relación, Nash continuó mostrándose insensible con Eleanor y en algunas ocasiones incluso la animó a dar al pequeño en adopción: desde su punto de vista, no solo se trataba de una buena solución, sino lo mejor que, probablemente, le podía pasar al niño. Así transcurrieron los primeros seis años de vida del pequeño, acogido de forma temporal por varias familias. Algunas de ellas insistieron a Eleanor para que se lo entregaran en adopción de forma definitiva, pero ella se opuso siempre.

En un momento de desesperación, Eleanor contactó con los padres de Nash para informarles del nacimiento de su nieto. Estos, lógicamente, se escandalizaron y reaccionaron presionando a Nash para que se casase y regulara aquella situación; pero él, a pesar del profundo respeto que le infundían sus opiniones, se negó en redondo. Las visitas esporádicas a su hijo acabarían en 1959, cuando Nash desapareció de la vida social a consecuencia de su grave enfermedad. Por desgracia, padre e hijo tardarían muchos años en retomar el contacto.



## AL MARGEN DE LAS CUESTIONES MORALES

La estancia de Nash en el MIT no estuvo exenta de tensiones. A su dificultad para entablar relaciones personales se sumó una atmósfera opresiva, en la que predominaban la desconfianza y el miedo: ese fue el resultado de la infiltración de los espías soviéticos y de la publicación por parte del Comité de Actividades Antiamericanas de una lista con los nombres de todos los sospechosos de albergar sentimientos comunistas y antiestadounidenses.

Las universidades también fueron situadas en el punto de mira y así, científicos de la talla del astrónomo Harlow Shapley (1885-1972), padre de Lloyd Shapley (1923-2016), uno de los escasos amigos de Nash y el más cercano a la camaradería, fueron acusados de comunismo y vieron sus carreras truncadas. La persecución alcanzó Princeton, donde fueron investigados, obligados a declarar y humillados públicamente Solomon Lefschetz (1884-1972), uno de los mentores de Nash, y Robert Oppenheimer (1904-1967), responsable del Proyecto Manhattan para la creación de la primera bomba atómica y director del Instituto de Estudios. Avanzados.

> «Me pareció deseable, más por razones personales y sociales que académicas, aceptar el puesto mejor pagado de instructor en el MIT. Estuve en su Facultad de Matemáticas desde 1951 hasta que dimití en la primavera de 1959.»
>
> — JOHN FORBES NASH.

El mensaje que llegó al medio universitario fue contundente: nadie estaba fuera de sospecha. En este contexto, se hallaban en peligro incluso personas que habían contribuido de forma apreciable a la victoria en la Segunda Guerra Mundial.

La persecución se extendió rápidamente y algunas universidades optaron por despedir a sus profesores sospechosos. En 1953, el MIT, que había aumentado su presupuesto y prestigio en los últimos años, temía que se le cortaran los fondos dedicados a la investigación. La situación se complicó cuando Norman Levinson,

el mentor y referente de Nash, fue amenazado con formar parte de la lista negra. Si bien el MIT se esforzó en demostrar su patriotismo, Levinson tuvo que declarar ante el Comité de Actividades Antiamericanas junto a otros muchos miembros de la universidad. Algunos de ellos delataron a colegas para salvarse, pero Levinson demostró una gran ética y valor personal y se negó a dar nombres. Gracias al apoyo del MIT, Levinson conservó su empleo, pero el proceso abrió en aquel centro heridas que tardaron años en cicatrizar. Nash no tomó parte alguna en las tensiones que hubo en el MIT, ya que rehuía cualquier discusión sobre temas morales. Sin embargo, como se comprobará más adelante, es posible que el clima de miedo en el que se vio envuelto alimentara alguna de las ideas que le obsesionaron y que le llevarían a perder su salud mental.

## OTRO ÉXITO MATEMÁTICO

El MIT esperaba todavía grandes cosas de la capacidad investigadora de Nash, al que se valoraba como un gran matemático de enorme talento. En ese punto, Nash puso sus ojos en otro problema que se consideraba imposible, relacionado con las variedades y su inmersión en espacios euclídeos. Y todo ello fue «culpa» de un matemático quince años mayor que él, Warren Ambrose (1914-1995), una figura sobresaliente en geometría dentro del propio MIT y considerado como uno de los padres de la geometría moderna. Ambrose tenía fama de ser una persona de carácter difícil y chocó constantemente con Nash, que lo hizo objetivo de sus burlas y menosprecios. Ambrose no toleraba estas bromas y respondía siempre que se le brindaba la ocasión. Así que, como una manera de humillar a Nash, se le ocurrió proponerle que si era tan listo, resolviera el reto de la inmersión o, expresado en términos matemáticos, el «embebimiento de las variedades». Huelga decir que el amor propio de Nash y sus ganas de cerrar la boca a Ambrose le decidieron a intentarlo.

El problema había sido propuesto por Bernhard Riemann (1826-1866) y continuaba abierto, pues nadie había conseguido

FOTO SUPERIOR IZQUIERDA.
**Lloyd Shapley, recibiendo el premio Nobel de Economía en 2012. Su padre fue víctima de la persecución del Comité de Actividades Antiamericanas.**

FOTO SUPERIOR DERECHA:
**Julius Robert Oppenheimer fue otro gran científico forjado en el MIT y hostigado por el presidente de dicho Comité, Joseph McCarthy.**

FOTO INFERIOR:
**El senador Joseph McCarthy (1908-1957), esgrimiendo pruebas durante un juicio en 1954.**

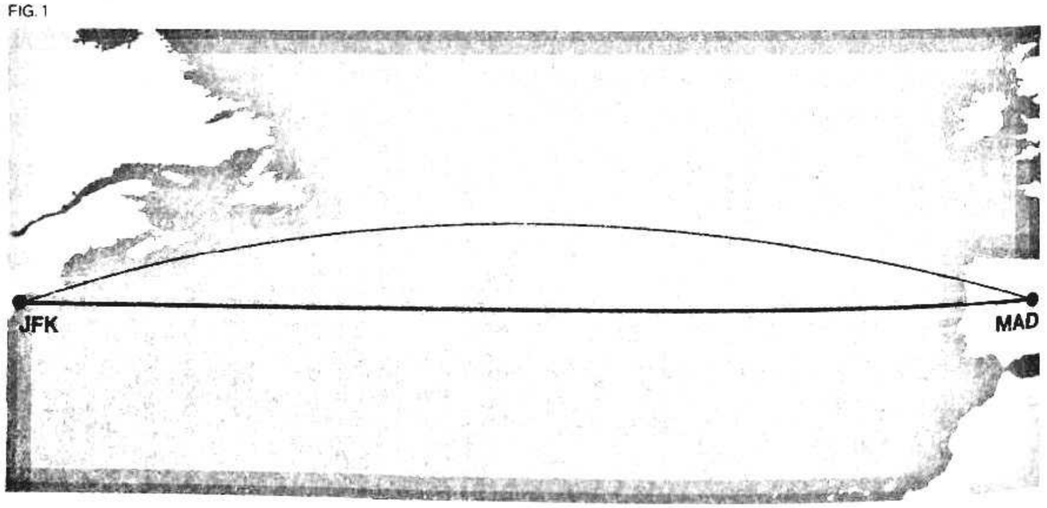
refutarlo ni probarlo. El reto estaba hecho a la medida del ego de Nash, ya que resolverlo aumentaría su prestigio como matemático. Además, tenía el componente personal de que había sido lanzado por Ambrose, cuya pregunta concreta, tomada de Riemann, fue la siguiente: «¿Es posible realizar la inmersión o embebimiento de cualquier variedad "riemanniana" en un espacio euclídeo?». Las variedades riemannianas son de tipo diferenciable, lo que se ha denominado como regulares. Para entender el calado de la pregunta, no obstante, deben explicarse algunas consideraciones previas.

## LA ESFERA NO ES UN ESPACIO EUCLÍDEO

La esfera, que es una de las variedades riemannianas más simples, no es un espacio euclídeo. Para ilustrarlo, no se puede pensar en una esfera flotando en el espacio, sino que la esfera es todo el espacio. No se puede salir de sus límites, ni meterse dentro de ella. Si se percibiese la Tierra como una esfera perfecta, no se cumplirían las propiedades que caracterizan a los espacios euclídeos: las líneas paralelas se cortan en los polos, lo que se llama meridianos, pero en el plano euclídeo las líneas paralelas no se cortan. Por otra

La distancia más corta entre Nueva York y Madrid viene dada por la geodésica, no por la línea recta.

FIG. 1

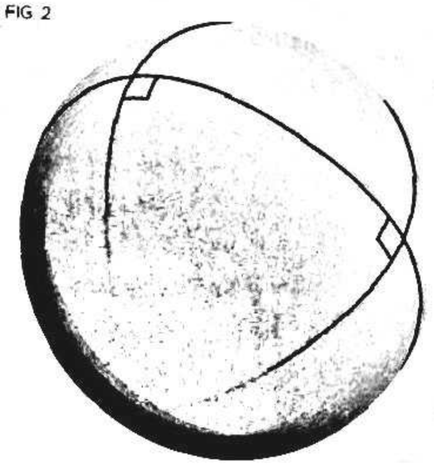





parte, si se saliera del Polo Norte en dirección sur durante una distancia *d*, se girase al este la misma distancia y se girara al norte de nuevo *d*, se volvería al punto de partida: y eso no pasa en ningún espacio euclídeo.

La distancia en la esfera es distinta a la del espacio euclídeo. La línea más corta que une dos puntos ya no es la línea recta, sino lo que se denomina «geodésica». Este principio es utilizado en la navegación aérea y marítima, donde sirve para encontrar las rutas más cortas entre lugares distantes de la Tierra, sin usar líneas rectas. Se puede apreciar un ejemplo en la figura 1. La distancia real más corta en un viaje aéreo desde el aeropuerto de Madrid hasta el JFK de Nueva York es la que se efectúa recorriendo la línea curva que está por encima de la recta que une las dos ciudades. En el plano no ocurre eso; pero en una superficie parecida a la esférica, como es la Tierra, la geodésica o línea más corta que une dos puntos no es recta.

FIG. 2



Uno de los postulados de Euclides es que la suma de los ángulos de los triángulos es 180 grados; sin embargo, en la esfera no se cumple. La aplicación de las fórmulas trigonométricas tradicionales sobre triángulos planos no es posible para triángulos esféricos, como el mostrado en la figura 2; entre otras cosas, porque la suma de los ángulos de ese triángulo esférico es de 270 grados.

Ya se ha establecido claramente que una esfera no es un espacio euclídeo. Sin embargo, es bastante fácil imaginar una esfera dentro de un espacio de tres dimensiones: de hecho, es su sitio natural. Pero cuando se habla de la pregunta que se formuló a Nash, se trata de un tipo especial de inmersión, lo que en matemáticas se define como «embebimiento». La idea es que la esfera esté embebida en un espacio euclídeo, pero respetando las propiedades del espacio donde se embebe. Es algo más que sumergir, es convertir la esfera en una parte del espacio euclídeo, con las propiedades de dicho espacio, en cuanto a distancias, ángulos, etcétera.

Sin embargo, ya se sabe que en la esfera no se cumplen. Esa es la cuestión fundamental, y Nash la abordó desechando pensar en algo tan fácil de imaginar como una esfera: él quería demostrar el resultado para cualquier variedad de cualquier dimensión.

## LOS TEOREMAS DE NASH Y SUS CLAVES

Nash se aplicó a fondo y contestó al reto que le había planteado Ambrose con una serie de teoremas que dejaron asombrado al mundo de las matemáticas no solo por su contenido, sino también por la manera en que afrontó su demostración. El primero de esos teoremas dice: «Para toda variedad diferenciable compacta (riemanniana) de dimensión $n$, existe un embebimiento isométrico tipo $C^1$ en $R^n$».

Para entender el resultado resulta preciso definir algunas herramientas matemáticas, pero la clave del teorema está en la palabra «isométrico»; es decir, que respete la métrica o distancia que se define en los espacios euclídeos y que, como se ha citado, no ocurre en general en las variedades.

Lo primero será definir un espacio topológico. En matemáticas, un espacio topológico está formado por un par $(X,\tau)$, donde $X$ es un conjunto y $\tau$ una familia de subconjuntos de $X$, que se denominan «abiertos», con las siguientes propiedades:

1. Los conjuntos $\varnothing$ y $X$ pertenecen a $\tau$.

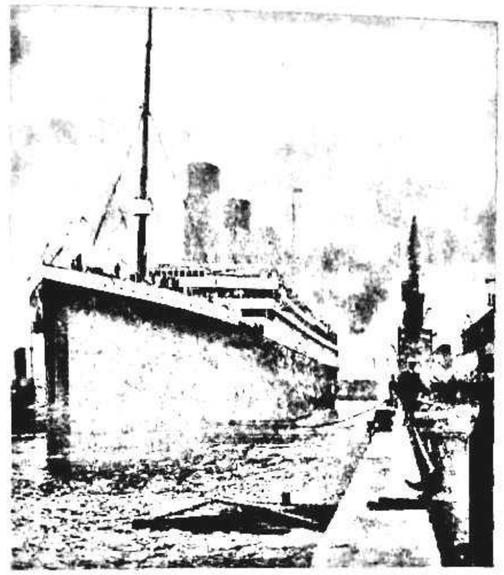
2. Si $\{O_i, i \in I\} \subseteq \tau$, entonces $\cup_{i \in I} O_i$ pertenece a $\tau$. Así, la unión de abiertos es un abierto, ya sea esta unión finita o infinita.

3. Si $O_1$ y $O_2 \in \tau$, entonces $O_1 \cap O_2 \in \tau$. O sea, la intersección finita de abiertos es un abierto.

Los espacios métricos, es decir, los espacios donde se puede definir una distancia, son siempre espacios topológicos. Para ello se definen como abiertos a las bolas abiertas de ese espacio A,



### UNA EXPLICACIÓN MATEMÁTICA AL HUNDIMIENTO DEL «TITANIC»



El transatlántico «Titanic» amarrado en el puerto de Southampton y listo para zarpar hacia Nueva York.

Todo el mundo conoce la historia del *Titanic*, el grandioso barco transatlántico de la línea White Star que se hundió el 14 de abril de 1912. El cine y la televisión han popularizado una tragedia que se saldó con la muerte de más de 1500 personas. Lo que pocos saben es que los motivos por los que se hundió tienen que ver con la geometría. Si se pregunta por la causa de su hundimiento, la respuesta surgirá unánime: chocó con un enorme iceberg y se fue a pique, destrozado por el golpe. Si bien es cierto, debe indagarse algo más en las razones de esta colisión. Dado que el *Titanic* zarpó de Southampton (Inglaterra), hizo escala en Cheburgo (Francia) y su destino era Nueva York, la pregunta es: ¿por qué había un iceberg en su camino? Si se une con una línea recta el puerto francés con Nueva York en un plano, se observará que su trayectoria está muy al sur de donde se espera encontrar un iceberg, máxime teniendo en cuenta que corría el mes de abril. No parece razonable que en una ruta tan al sur hubiera un iceberg de tamaño suficiente para hundir el buque de pasajeros más grande del mundo. La respuesta es que el *Titanic* no siguió esa ruta, que sobre el plano parece la mejor.

**El ansia de llegar antes y las geodésicas**

El *Titanic* quería batir todos los registros de navegación marítima, incluido el de velocidad. Todo el mundo sabe que para que un camino se haga lo más rápido posible se debe elegir la ruta más corta. Sobre el plano parece claro que es una recta, pero la Tierra se parece más a una esfera que a un plano: por ello, los caminos más cortos se encuentran en las geodésicas, las líneas más cortas que unen dos puntos en una esfera, y no son rectas. Eso obligó al barco a desplazarse hacia el norte para acortar su viaje. Cuanto más lejos se está del ecuador, menos distancia hay que recorrer para traspasar un meridiano. Por eso, el *Titanic* pasó cerca de la costa de Terranova y, cuando estaba saliendo de la zona de peligro, se topó con el iceberg que acabó con su viaje. Así que la respuesta que da la geometría es que el *Titanic* se hundió porque no se tuvo en consideración que la esfera no es un espacio euclídeo.

donde una bola abierta de centro $x$ y radio $r$, $B_r(x)$, se define de la siguiente manera:

$$B_r(x) = \{y \in A \text{ tal que } d(x,y) < r\}$$

Como en los espacios euclídeos se tiene definida una distancia, son espacios topológicos. En el caso de la recta real, los abiertos son los intervalos abiertos y en el plano son los círculos a los que se les quita la circunferencia que los define. Obviamente, la distancia que se usa es la euclídea.

Ahora se necesita una definición muy cercana a difeomorfismo, para la que se emplea el término homeomorfismo. En realidad, la diferencia es muy escasa. Como se recordará, un difeomorfismo es un homeomorfismo diferenciable y cuya inversa también es diferenciable. Pues bien, para ser homeomorfismo solo se exigirá continuidad a la aplicación y a su inversa. La continuidad es una condición más débil que la diferenciabilidad, pues toda función derivable es continua, pero lo contrario no se verifica. Basta con pensar en la función valor absoluto, que es continua, pero no diferenciable en el 0. La idea que transmite el homeomorfismo es bastante similar al difeomorfismo, ya que para que dos espacios sean homeomorfos tienen que ser muy parecidos en su estructura. El siguiente paso será definir lo que es un embebimiento.

## ¿QUÉ ES UN EMBEBIMIENTO?

Un embebimiento es una aplicación $f$ entre dos espacios topológicos, $f:(X,\tau)\mapsto(Y,\tau')$, tal que $f:(X,\tau)\mapsto\left(f(X),\tau'_{/f(X)}\right)$ es un homeomorfismo. Se dice entonces que $X$ está embebido en $Y$ mediante $f$. La idea es hacer una inmersión de $X$ en $Y$, pero respetando la topología de $Y$ en los puntos que son imagen de alguno de $X$. En el teorema de Nash, $X$ es una variedad riemanniana, $Y$ es un espacio euclídeo, que es un espacio topológico con la distancia euclídea, y se puede hacer la inmersión respetando la topología del espacio euclídeo, es decir, respetando las distancias; de ahí el término isométrico que aparece en el resultado. Lo de que el embebimiento sea $C^1$ es para remarcar el hecho de que la función es diferenciable y su derivada es continua.

Cuando se habla de funciones $C^k$ se hace referencia a que la función se puede derivar $k$ veces y a que su derivada es continua. Las funciones infinitamente derivables, como son los polinomios, se dicen de clase $C^\infty$.

A partir del primer resultado encontrado por Nash acerca de la inmersión de variedades, Nash logró una serie de resultados que generalizaban este teorema.

— Para toda variedad diferenciable riemanniana de dimensión $n$, existe una inmersión $C^1$ en $R^{2n}$ y un embebimiento isométrico en $R^{2n+1}$. La diferencia es que en este resultado no se exige que la variedad sea compacta.

— Si una variedad diferenciable riemanniana de dimensión $n$ tiene una inmersión o embebimiento de clase $C^\infty$ en $R^k$ con $k \geq n+2$, entonces también tiene una inmersión isométrica o embebimiento isométrico en $R^k$. En este teorema se determina la menor dimensión del espacio donde se puede obtener una inmersión.

## NASH SUPERA EL DESAFÍO CON UNA NUEVA TÉCNICA

Una vez más, Nash se salió con la suya. Demostró que el embebimiento era posible y calculó las dimensiones mínimas del espacio en que se hacía la inmersión. En este último trabajo, lo más sorprendente fue que el espacio euclídeo en que se embebía la variedad era de dimensión menor a la esperada. Se ignoraba si era posible el embebimiento, pero se sospechaba que, en caso afirmativo, sería en espacios de una dimensión mucho mayor que el de la variedad. Así, Nash escaló otro Everest de las matemáticas, y todo empezó por el desafío que le lanzó Ambrose.

En 1954, Nash publicó «$C^1$ isometric embbeding», que se puede traducir como «Embebimiento isométrico $C^1$», en la revista

*Annals of Mathematics* y la cuestión quedó parcialmente resuelta. Dos años más tarde, cerró definitivamente el problema con el artículo «The embedding problems for Riemann Manifolds» («Los problemas de embebimiento para las variedades de Riemann»), que vio la luz en la misma publicación. Nash había empleado un poco más de dos años en conseguir un objetivo que muchos creían imposible. Ambrose, su retador, hizo lo que correspondía a un matemático honesto: se unió con entusiasmo al coro de alabanzas que Nash recibió por su trabajo.

Los resultados no eran solo asombrosos, sino que además incorporaban otro hallazgo fundamental: una nueva técnica para resolver ecuaciones diferenciales. El método de buscar caminos propios a la hora de abordar los problemas condujo a Nash a descubrir herramientas matemáticas desconocidas hasta ese momento. Esto le permitió demostrar el resultado sobre embebimientos con una técnica que más tarde se conoció como Nash-Moser. Llevado de su arrogancia e ilimitada confianza en sí mismo, Nash se apartó de los argumentos de tipo geométrico usados por los matemáticos anteriores, incluido el propio Ambrose, y alcanzó un resultado inesperado. Esta aportación confirmó su gloria como matemático. Además, se producía en un campo, el de las ecuaciones diferenciales, que estaba muy alejado de la topología, donde se encontraba el origen del problema que quería resolver.

## ECUACIONES DIFERENCIALES

Para comprender la técnica descubierta por Nash primero se debe entender qué es una ecuación diferencial. Lo que distingue a una ecuación normal y una ecuación diferencial es, sobre todo, el tipo de respuesta que se busca. En muchos problemas de matemáticas, la solución es un número o un conjunto de ellos.

Por ejemplo, un enunciado presenta a un padre y un hijo donde la edad del padre dobla a la del hijo y la edad de este último es veinticinco años. Es fácil averiguar que la edad del padre es cincuenta años. Se trata de una ecuación simple de primer grado. Incluso se pueden resolver sistemas con varias ecuaciones y varias incógnitas, especialmente si son lineales. Sin embargo, en ocasiones, la respuesta que se busca es más compleja. Por ejemplo, otro enunciado podía presentar una piscina que se vacía sin ayuda de un motor, solo por el empuje de la fuerza de gravedad. Dicha piscina tiene 50 metros cúbicos y tarda en vaciarse tres horas. ¿Cuál es la cantidad de agua que hay en la piscina en el proceso de vaciado? La pregunta parece incluso absurda. ¿Cómo es posible saber con exactitud algo que está cambiando continuamente? En todo caso, podría decirse lo que queda en un momento determinado del proceso; pero esa no es la cuestión, se necesita saber en todo momento. La pregunta no admite una respuesta numérica, por lo que responder con una cantidad concreta no tiene sentido en este caso. Cualquier número entre 0 y 50 es la solución en algún momento. Tampoco se puede asegurar que la cantidad baje de manera lineal, así que un número promedio como 25 tampoco da la solución. Entonces, ¿qué tipo de solución sería aceptable?

Lo que se busca es una función matemática que diga qué cantidad de agua hay en función del tiempo. Se sabe que la función en el tiempo $t=0$ vale 50 y en $t=3$ horas vale 0. Para poder plantear una ecuación diferencial se debe conocer algo sobre la función que se busca. En el caso de la piscina, la velocidad con la que sale el agua es proporcional a la cantidad que queda en la piscina debido a la fuerza de la gravedad. Ese concepto de velocidad o de cambio se puede expresar a través de su derivada. La derivada de una función en un punto revela si la función es creciente cuando su derivada es positiva; decreciente, si es negativa, y existen varias posibilidades si vale cero. Además, da la intensidad de este cambio. Así pues, una ecuación diferencial es una ecuación matemática que relaciona una función con sus derivadas.

En general, la solución de estas ecuaciones no es única. Para concretarla se deben añadir otros datos, como el estado del sistema al principio o al final, o los dos, si se conocen. Si la función que se busca tiene varias variables, la relación se establece con sus derivadas parciales. Para conseguir una derivada parcial, debe derivarse la función respecto a una de sus variables y mantener el resto como si fueran constantes. Al vector de las derivadas parciales se le llama «gradiente de la función» y da la dirección en que

más rápido crece la función que se está estudiando. Un ejemplo de cálculo de gradiente de una función $f$ de tres variables sería:

$$f(x_1,x_2,x_3): RxRx[-9,+\infty] \to R,$$

$$\text{con } f(x_1,x_2,x_3) = x_1 \operatorname{sen} x_2 + x_1^2 \ln(x_3+10),$$

y sus derivadas parciales son:

$$\frac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{x_1} = \operatorname{sen} x_2 + 2x_1 \ln(x_3+10)$$

$$\frac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{x_2} = x_1 \cos x_2$$

$$\frac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{x_3} = \frac{x_1^2}{x_3+10},$$

con lo que el vector gradiente queda:

$$\nabla f(x_1,x_2,x_3) = \left(\operatorname{sen} x_2 + 2x_1 \ln(x_3+10), x_1 \cos x_2, \frac{x_1^2}{x_3+10}\right)$$

Las funciones derivadas son a su vez funciones y pueden derivarse tantas veces como lo permita la función derivada. Esto ya se trató con la clase de funciones $C^*$. Así, las ecuaciones diferenciales pueden ser de distintos órdenes según la derivada de orden más elevado que intervenga en ellas. Si se trata de la derivada, se tienen ecuaciones de primer orden; si es la segunda derivada, son de segundo orden, y así sucesivamente.

En el caso de la cantidad de agua de la piscina, se puede plantear una ecuación diferencial donde $f(t)$ es la función que da la cantidad de agua que queda en función del tiempo y $f'(t)$ es la velocidad con la que sale. Se supone que la velocidad de salida es proporcional a la cantidad que queda y se sabe que $f(t)$ es una función decreciente, porque la cantidad disminuye con el tiempo, de lo que se deduce que su derivada es negativa. Se trata de una sencilla ecuación de primer grado que se puede escribir así:

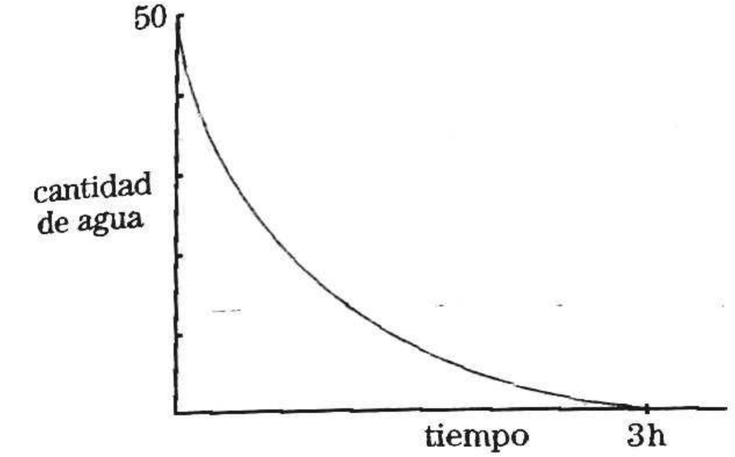


$$f'(t) = -kf(t),$$

cuya solución da lugar a una exponencial negativa:

$$f(t) = 50e^{-kt} + C,$$

donde $k$ y $C$ son parámetros que se calculan sabiendo los valores que tiene la función al principio y final del proceso, pues $f(0) = 50$ y $f(3) = 0$. Las exponenciales negativas tienen la siguiente forma:




La solución se corresponde con la intuición que se tenía: como la velocidad de salida del agua no es constante, el descenso no es lineal y, por lo tanto, pierde agua más rápido al inicio del proceso que al final.

Para intentar resolver las ecuaciones diferenciales que se le planteaban en el problema del embebimiento, Nash pensó en usar un método iterativo del tipo descubierto por Isaac Newton. El método de Newton permite aproximar la solución de una ecuación del tipo $f(x) = 0$, donde $f$ es una función cualquiera. En caso de que la función sea derivable, Newton partía de un punto inicial cualquiera $x_0$ y construía una sucesión a partir de la siguiente fórmula:

$$x_{j+1} = x_j - \frac{f(x_j)}{f'(x_j)}$$

Se puede probar que, bajo ciertas hipótesis, la sucesión converge a la solución del problema. La dificultad que hallaba Nash es que su método exigía que las funciones fuesen derivables más veces de lo que podía exigir en su problema. Al respecto, afirmó:

> Suponga que tiene cierto operador diferencial de orden 5, y que empieza la iteración con una función que tiene 20 derivadas. Si en cada iteración pierde 1 derivada, después de 16 iteraciones la función obtenida tiene una regularidad inferior a la requerida por su operador, con lo que no se puede seguir iterando.

Nash usaba la palabra «operador» refiriéndose a una operación matemática, en este caso, una ecuación diferencial que necesita la derivada quinta de la función; o lo que es lo mismo, que la función sea de clase $C^5$ como mínimo. Si como Nash explicó partía de una función de clase $C^{20}$ y en las distintas iteraciones la había derivado dieciséis veces, esa derivada era de clase $C^4$ y para resolver la ecuación debía derivarla cinco veces, lo que no era posible.

El problema al que se enfrentó Nash resulta bastante común en matemáticas: hay un método eficiente para resolver un problema, pero no se verifican las condiciones exigidas para aplicarlo.

### MALTHUS NO APLICÓ LA ECUACIÓN DIFERENCIAL ADECUADA

El clérigo inglés Thomas Robert Malthus (1766-1834) desarrolló en su *Ensayo sobre el principio de población* (1798) la teoría de que la población aumenta en progresión geométrica, con un crecimiento exponencial, y más rápidamente que los recursos, que lo hacen en progresión aritmética. La hipótesis de Malthus era que la velocidad con la que crece la población es proporcional a su tamaño. Para expresar dicha velocidad se usa la derivada. Así, la ecuación queda:

$$P'(t) = r\,P(t)$$

donde P(t) es la función que da el tamaño de la población en el tiempo t, que toma valores positivos, P' (t) es su función derivada que indica la velocidad de crecimiento de la población, y r es una constante positiva para poblaciones no condenadas a la extinción. A la relación

$$\frac{P'(t)}{P(t)} = r$$

se le llama tasa de crecimiento y está relacionada, sobre todo, con las tasas de natalidad y mortalidad de la población estudiada. Si se integra en los dos términos de la ecuación:

$$\int \frac{P'(t)}{P(t)}\,dt = \int r\,dt$$

las integrales que se obtienen son sencillas de resolver, porque el primer término es un logaritmo y el segundo una constante, por lo que queda:

$$\ln P(t) = r\cdot t + C \Rightarrow P(t) = e^{r\cdot t + C} = A e^{rt},$$

donde C es una constante cualquiera y $A = e^C$. Para saber el tamaño inicial de nuestra población se puede tomar $P(0) = 1$ (en miles de personas), lo que obliga a que A sea igual a 1. Así pues, como decía Malthus, el crecimiento es de tipo exponencial. Este tipo de funciones crecen rápidamente, como muestra la figura 1, por lo que su alarma habría estado justificada de ser sus hipótesis ciertas. Hoy se sabe que el crecimiento no solo es proporcional al tamaño de la población: también existen unos frenos al crecimiento de tipo cuadrático que se activan cuando la población crece. Con lo que la ecuación diferencial, para este caso, es:

$P'(t) = r\,P(t)(k - P(t))$, donde k es el umbral máximo de crecimiento.

FIG. 1

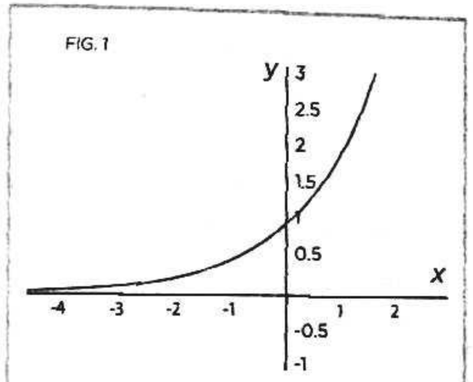
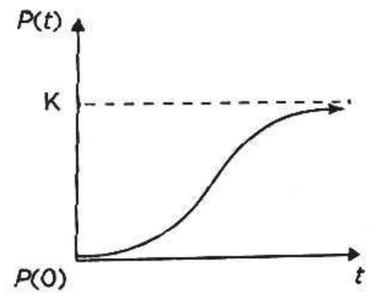



FIG. 2




Su solución da lugar a una curva de tipo logístico —figura 2— en la que cuando el tamaño de la población es pequeño, el crecimiento logístico es muy parecido al exponencial. Los cambios aparecen cuando la población crece y los frenos cuadráticos adquieren importancia.

Un ejemplo sencillo para comprender esta dificultad es imaginar cómo enfrentarse a un problema de optimización sin restricciones:

$$\text{Min } f(x),$$

donde $f(x)$ es una función cualquiera. La teoría dice que se debe derivar e igualar a cero, ya que en los mínimos la función derivada vale cero. Esta es una condición necesaria, pero no suficiente; es decir, hay puntos en los que la derivada se anula y que no son mínimos. Así que el método necesita a la segunda derivada. Si es positiva, ya se sabe que es mínimo; si es negativa, se está en el caso de un máximo, y si es cero, hay que seguir derivando hasta que se pueda dilucidar si es máximo, mínimo o punto de inflexión. Este último término se emplea como sinónimo de cambio de tendencia al hablar, por ejemplo, de la evolución del paro o la economía; pero cuando se dice que tuvo un punto de inflexión en tal fecha, en realidad lo que se tiene es un máximo o un mínimo.

«Sabía que estaba realizando un buen trabajo, pero no podía sospechar cuánto y cómo sería apreciado en el futuro. No tienes esa bola de cristal.»

**— John Forbes Nash.**

El problema está en que la función $f$ no tiene por qué tener todas las derivadas que se necesiten. Si $f$ es de clase $C^1$ no tiene que existir la segunda derivada y el método no es aplicable. Pues bien, Nash se enfrentó a ese problema y su idea fue introducir un operador regularizador que se aplicara al final de cada iteración y sirviera para solventar la dificultad. La regularidad de las funciones se consigue construyendo una nueva función reguladora, que es muy cercana a la que se tiene, pero en la que se han suavizado los puntos no derivables: con ello, aumenta la posibilidad de derivarla tantas veces como se necesite. Hoy en día, el método de resolución de ecuaciones diferenciales ideado por Nash recibe el nombre de Nash-Moser, por las mejoras aportadas por el matemático estadounidense de origen alemán Jürgen Moser (1928-1999), que además demostró que la técnica podía ser utilizada en el cálculo de órbitas en el movimiento de los planetas.



## EXPULSADO CON DESHONOR DE LA RAND

El año 1954 fue muy importante en la vida de Nash por otra noticia de signo totalmente contrario: su expulsión fulminante de la RAND. Nash, de manera simultánea a su romance con Eleanor, mantuvo su segunda relación especial conocida con el estudiante Jack Bricker. La relación fue tan perturbadora que, a pesar de su probado talento, Bricker abandonaría el MIT posteriormente. El escándalo definitivo estalló a finales de agosto de 1954, cuando Nash fue detenido acusado de exhibicionismo. La versión oficial fue que se había insinuado en unos aseos a un hombre, que resultó ser policía. Nash dio como referencia su trabajo en la RAND y el problema se hizo público. No había margen de actuación: trabajaba para una corporación militar y tenía acceso, si bien limitado, a información sensible para la seguridad nacional. En un contexto en que la homosexualidad era perseguida penalmente, se consideró que podía ser chantajeado por agentes extranjeros.

Nash no pareció darse cuenta de la gravedad del incidente. Afirmó que la denuncia era falsa, aclaró que no era homosexual y aportó la foto de Eleanor y su hijo, con lo que hizo pública esta relación. La RAND le expulsó sin darle tiempo siquiera a recoger sus pertenencias. Fue una humillación en toda regla, no muy distinta a las que habían sufrido, por otros motivos, los «sospechosos» Shapley, Lefschetz, Oppenheimer y Levinson; así como Nash no movió un dedo por ellos, ahora nadie lo movía por él. Décadas más tarde, en un ejercicio de sinceridad, confesó que su expulsión deshonrosa de la RAND fue un duro golpe moral y le desequilibró mentalmente. En cualquier caso, los hechos redujeron su radio de acción al MIT. Precisamente, de regreso allí, mientras escuchaba a sus músicos predilectos, reparó en la presencia de una joven que había sido alumna suya y a la que hasta la fecha no había prestado la debida atención: la estudiante salvadoreña Alicia Lardé.

CAPÍTULO 4

# La obsesión por alcanzar la gloria matemática

En 1957, Nash contrajo matrimonio, pero con una mujer que no era la madre de su hijo. Su obsesión por ser el mejor matemático del mundo le enfrentó a las ecuaciones diferenciales no lineales en derivadas parciales, tarea que coronó con éxito al año siguiente. Sin embargo, el destino le arrebató la gloria en exclusiva y, frustrado, se conjuró para resolver la hipótesis de Riemann. Preso de su frenesí mental, no tardó en pagar un precio demasiado alto.

Durante sus primeros años como profesor, Nash fue más famoso entre sus colegas por sus controversias, incluso de tipo personal, que por su colaboración. Sin duda, la personalidad de aquel «profesor niño» no era la adecuada para trabajar en equipo: por una parte, a pocos de los matemáticos con los que se relacionaba les reconocía siquiera estar entre iguales, y mucho menos que le pudieran aportar algo; y por otra, continuaba siendo ferozmente individualista en su trabajo. No obstante, debe insistirse en que esta posición o táctica estuvo en el origen de muchos de sus éxitos. De no haber pensado que los trabajos de Von Neumann eran incompletos, no habría abordado la teoría de juegos de manera distinta, ni habría abierto la perspectiva a los juegos no cooperativos e introducido el concepto de equilibrio, aunque no fuera la mejor solución. Solo alguien que llegaba con una mente tan abierta podía pensar que todas las variedades riemannianas se podían relacionar con las variedades algebraicas. Por no hablar de que aceptase el reto de las inmersiones sin sentirse derrotado de antemano, lo que requería una confianza ciega en sí mismo y la osadía de enfrentarse a un problema que había superado a los mejores matemáticos especialistas.

Nash hacía gala de una nueva forma de enfrentarse a los problemas matemáticos que no se basaba en los resultados anteriores, lo que resultaba tan desconcertante como meritorio. Así, por ejem-

plo, como las herramientas geométricas no funcionaban a la hora de tratar los embebimientos, no dudó en recurrir a otras técnicas basadas en las ecuaciones diferenciales, rama de las matemáticas que conocía, pero de la que estaba muy lejos de ser considerado un especialista. Y no solo eso: además, las herramientas existentes ni siquiera eran suficientes para resolver el problema que se había planteado y tuvo que avanzar en su mejora. Esta decisión, para alguien que no había tratado las ecuaciones diferenciales en profundidad antes de ese momento, solo puede ser calificada de arriesgada y sorprendente.

Sin embargo, la labor profesional de Nash en el MIT no descansaba únicamente sobre el estudio y la resolución de problemas matemáticos. Una parte importante de su trabajo consistía en dar clase a los estudiantes que aspiraban a obtener el doctorado, tarea que no le interesaba especialmente y para la que tampoco estaba dotado, ni convencido. Como profesor, Nash se comportaba distante y perdía con rapidez la paciencia si sus estudiantes, que pertenecían a la élite intelectual científica de Estados Unidos, no respondían a sus expectativas, lo que ocurría con frecuencia. Nash se sentía a menudo defraudado con su rendimiento, aunque lo más probable es que les exigiera demasiado. No podía imaginar que en aquellas aulas pobladas de jóvenes prometedores, en las que no se sentía del todo a gusto y donde sembraba cierta mortificación, le aguardaba la mejor noticia de su vida.

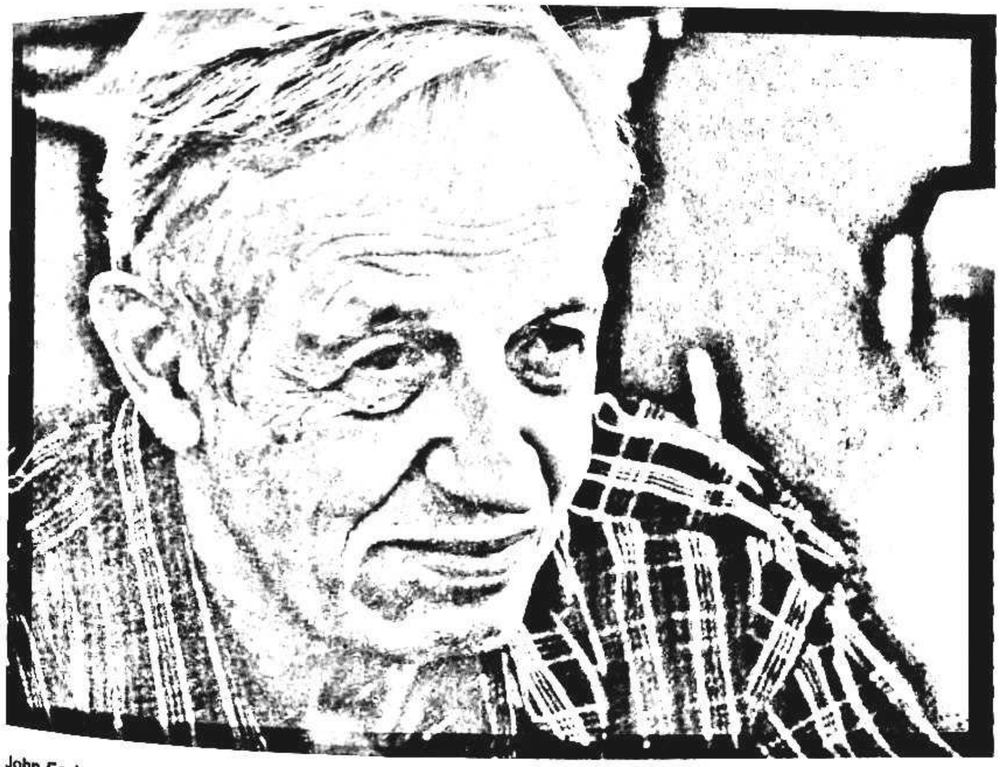
## SU GRAN AMOR: ALICIA LARDÉ

Durante el curso 1953/54, Nash impartió la asignatura de análisis avanzado para ingenieros, que debían cursar los alumnos que quisiesen doctorarse en Física. En aquellas aulas conoció a Alicia Lardé López-Harrison (1933-2015), una estudiante salvadoreña que provenía de una familia rica exiliada en Estados Unidos. No hay ninguna evidencia de que Nash se fijara en ella, pese a que se trataba de una joven atractiva y además las mujeres estaban en franca minoría en el MIT: de aquella promoción, que reunió a 800 es-



### UN SENTIDO DEL HUMOR MUY PARTICULAR

Los comportamientos sociales de Nash sembraron tanto desconcierto como su sentido del humor, igualmente incomprendido. Por ejemplo, en su nota biográfica describió su nacimiento como «Mi comienzo como individuo legalmente reconocido» y lo situó, plasmando el sentido efímero de la vida, «en el sanatorio Bluefield, un hospital que ya no existe». Se sabe que gastó algunas bromas pesadas en la adolescencia, pero de adulto prefirió las reflexiones agudas y las frases cortantes, tan temidas entre sus colegas y el alumnado. Llevado de su egocentrismo, al referirse a sus trastornos mentales afirmó que «Quien no es zoroastra puede considerar a Zaratustra como un simple loco que hizo adoptar un culto de adoración ritual al fuego a millones de ingenuos seguidores. Pero sin su "locura", Zaratustra solo habría sido otro de los millones de miles de millones de seres humanos que vivieron y han sido olvidados». Esta sentencia, por otra parte, revela cómo le pesaba el ansia de triunfar y el deseo de que su legado fuera inmortal. Por último, cuando recibió el premio Nobel dio una conferencia de prensa en la que reveló que esperaba que ese reconocimiento animara a su banco a darle una tarjeta de crédito.



John Forbes Nash, en una instantánea tomada en Estambul en el año 2005.

tudiantes, solo 16 eran mujeres; y de ellas, solo Alicia y otra joven consiguieron graduarse en Física.

Nash, enfrascado en sus retos y controversias, no mostró ningún interés por Alicia en la época en que fue su alumna; ella, en cambio, sí. De hecho, su correspondencia particular incluía algunas referencias a su profesor y lo impresionada que se sentía por él. Después de su traumática salida de la RAND, Nash había vuelto al MIT y procuraba retomar su vida habitual, en la que la música clásica ocupaba un papel destacado. Solía pasar bastantes horas en la fonoteca del centro escuchando las obras de algunos de sus compositores favoritos, como Mozart o Bach. En aquel reducto de paz, Alicia dedicaba parte de su tiempo libre a trabajar en el mostrador de atención. Allí fue donde Nash se fijó en ella por primera vez y, de ese modo, la «chica que trabaja en la fonoteca» pasó a formar parte de sus conversaciones.

«Él era, un poco, el rubio del Departamento de Matemáticas. Creo que estaba considerado muy joven para ese puesto, y era muy atractivo.»

— **Alicia Lardé.**

El noviazgo tomó forma y fue progresando con dificultades, debido a que Nash se comportó de forma desconsiderada con Alicia en infinidad de ocasiones y, para variar, alternó períodos de tranquilidad con otros de hostilidad. No obstante, la invitó a conocer a sus padres, lo que da una idea de que para él esta relación resultaba muy distinta de la que mantenía simultáneamente con Eleanor. Alicia siempre demostró estar muy enamorada de Nash y no solo aceptó con buen ánimo sus excentricidades, sino también que Eleanor se pusiera en contacto con ella y le revelara que Nash era el padre de su hijo, al que además desatendía. Debe señalarse que en la década de 1950 primaba una cierta tolerancia social hacia los hombres que mantenían amantes de forma paralela a otro tipo de relación socialmente más aceptable, incluido el matrimonio.

FOTO SUPERIOR IZQUIERDA:
**Un joven y atlético Nash posa de pie en una fecha indeterminada junto a un grupo de amigos. A su lado está sentada Alicia Lardé, alumna suya y futura esposa.**

FOTO SUPERIOR DERECHA:
**Interior de la cafetería del Instituto de Estudios Avanzados del Instituto Tecnológico de Massachussets.**

FOTO INFERIOR:
**John Forbes Nash y su esposa, Alicia, en una fotografía tomada en la Universidad de Princeton en el año 2014.**

En el curso de este difícil noviazgo, Nash perdió a su padre, víctima de un ataque al corazón. Aparentemente esta muerte no le afectó en exceso, dado que su trato con él era distante, mucho menos íntimo que el que prodigaba a su madre; pero aunque se guardó de exteriorizarlo, la pérdida le entristeció. Lo cierto es que su padre le trató con afecto durante la infancia para compensar sus largas ausencias, toleró todo lo que pudo su carácter especial y, además, le introdujo en el fascinante mundo de la electricidad y, por extensión, de la ciencia.

Entre encuentros y desencuentros, la relación de Nash y Alicia remontó todos los escollos y, finalmente, acabó en boda. El enlace se celebró en febrero de 1957 y, acto seguido, el matrimonio decidió vivir en Nueva York, donde se dibujaban mejores perspectivas laborales para Alicia.

## UNA AMBICIÓN SIN LÍMITES

Al inicio del curso 1956/57, Nash se integró de nuevo en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton. Cerca de su residencia se encontraba el Instituto Courant de Matemáticas Avanzadas, creado dos décadas antes y lleno de jóvenes talentos de la matemática estadounidense. Nash pasaba algunos días por el Courant para intercambiar ideas con sus colegas antes de llegar a Princeton y, con el paso del tiempo, se sintió cada más interesado en las cuestiones matemáticas que estos le proponían. Pronto se enfrascó en discutirlas con un matemático de origen húngaro, Peter Lax, un especialista en ecuaciones diferenciales que ganaría el premio Abel en 2005, y también con el matemático canadiense Louis Nirenberg. De forma inesperada, Nash se halló muy a gusto entre dos colegas que, quizás, estuvieran a su altura; y quizás, incluso, podían aportarle cosas.

En aquellos agradables encuentros, Nash no podía sospechar que Nirenberg y él mismo sería galardonados conjuntamente en el año 2015 con el premio Abel. Al término del curso 1956/57, casi se podía decir que Nash pasaba más tiempo en el Instituto Courant que en Princeton.



### INSTITUTO COURANT DE MATEMÁTICAS AVANZADAS

El Instituto Courant de Matemáticas Avanzadas es una institución independiente de la Universidad de Nueva York. Su fundación tuvo lugar en 1936 y corrió a cargo del matemático alemán Richard Courant (1888-1972), que tenía como modelo el instituto de la Universidad de Gotinga, también fundado por él mismo. Natural de la ciudad prusiana de Lublinitz, Courant estudió matemáticas en Breslau y después en Gotinga, donde se doctoró bajo la dirección de David Hilbert. De origen judío, decidió abandonar Alemania ante el ascenso del nazismo. Después de pasar un año en Cambridge, emigró a Estados Unidos y consiguió una plaza de profesor en la Universidad de Nueva York (1936). Ese mismo año fundó el Instituto que lleva su nombre, con el propósito de crear «un lugar donde no hubiera distinciones entre las matemáticas y sus aplicaciones, y donde los estudiantes y los profesores fuesen como una familia».

El Warren Weaver Hall, sede principal del Instituto Courant en Manhattan, Nueva York.

**Un crisol de talentos**

El Instituto Courant no solo se dedica a la investigación de los aspectos más abstractos de las matemáticas, sino que también fomenta su conexión con otras ciencias, como la física, la ingeniería, la biología y la economía. Otra de sus misiones consiste en desarrollar mejores métodos en la educación matemática desde los niveles más básicos. La nómina de matemáticos que han investigado e investigan actualmente en su sede resulta extensa, por lo que baste decir que cuatro de ellos han sido acreedores en los últimos años del premio Abel, el más relevante en matemáticas: Peter Lax, que lo obtuvo en el año 2005; Srinivasa Varadhan, ganador en el 2007; Mijail Gromov, que hizo lo propio en el 2009, y Louis Nirenberg, en el 2015. Por último, cabe destacar que Richard Courant destacó por sus habilidades organizativas, pero también por realizar importantes contribuciones matemáticas. Sus libros más populares son *Métodos de física matemática*, escrito junto al citado David Hilbert, y la obra de divulgación *¿Qué es la matemática?*, del que fue coautor el matemático estadounidense Herbert Robbins (1915-2001).

Fueron precisamente Lax y Nirenberg quienes animaron a Nash a adentrarse en las ecuaciones diferenciales no lineales en derivadas parciales. Nash explicó las razones de su interés en un artículo que publicó en 1958 en *American Journal of Mathematics*:

> Los problemas planteados en el campo de las ecuaciones no lineales con derivadas parciales son muy relevantes para las matemáticas aplicadas y para el conjunto de la ciencia, quizá más relevantes que los problemas planteados en cualquier otro ámbito de las matemáticas, y se trata de un campo que da muestras de estar en disposición de desarrollarse rápidamente.

Es posible que a este interés contribuyera el hecho de que Nash había encontrado resultados muy relevantes en este campo —el teorema de Nash-Moser— en su estudio de los embebimientos de las variedades.

## ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES

Las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales surgen de la necesidad de modelizar fenómenos físicos muy conocidos. Dentro de ellas, las lineales de orden dos, muy útiles en la física matemática, se han dividido tradicionalmente en tres clases principales:

a) Ecuaciones de tipo hiperbólico. Describen fenómenos oscilatorios de diferente naturaleza —vibraciones de cuerdas, membranas, oscilaciones acústicas del gas en los tubos, oscilaciones electromagnéticas, etcétera—. La más simple es la ecuación de vibraciones de la cuerda en el caso unidimensional, cuya expresión es:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

donde $u = u(x,t)$ una función de dos variables, en la que $x$ es la coordenada espacial y $t$ el tiempo. Así pues, $u$ permite describir el movimiento. Además, $a^2 = T/\rho$, donde $T$ es la tensión de la cuerda y $\rho$ su densidad lineal.

b) Ecuaciones de tipo parabólico. Modelizan procesos de conductividad térmica y su difusión. El caso más simple unidimensional tiene la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

donde $u$ es la misma que antes, $a^2 = K/c\rho$, donde $\rho$ es la densidad del medio, $c$ es el calor específico y $K$ es el coeficiente de conductividad térmica.

c) Ecuaciones de tipo elíptico. Describen procesos a ciclo fijo, cuando la función $u$ no depende del tiempo. Podría decirse que las ecuaciones de tipo elíptico modelizan un estado de equilibrio para los casos anteriores. Un representante típico es la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

donde $u$ es una función que depende de las variables $x$ e $y$.

Estos ejemplos suponen el caso más simple de esta clase de problemas. De hecho, solo se ha considerado el caso unidimensional, con lo que la variable $x$ es suficiente para describir las coordenadas espaciales. En caso de considerar espacios de dimensión superior, debe cambiarse la variable $x$ por un vector de $n$ coordenadas. Son ecuaciones de segundo orden porque hay que derivar dos veces la función. La expresión $\partial^2 u/\partial x^2$ indica que la función $u$ se deriva dos veces con respecto a la variable $x$. Para ello debe derivarse la componente relativa a la variable $x$ del gradiente de $u$.

Estas ecuaciones, en general, son de tipo no lineal, lo que complica mucho su estudio. La contribución de Nash a las ecuaciones en derivadas parciales se produjo, en realidad, en el con-

texto de las ecuaciones no lineales de tipo elíptico y parabólico, que son aún más difíciles. O como afirmó el propio Nash:

> Nuestros resultados llenan este vacío y ahora debe ser posible construir una teoría general para las ecuaciones no lineales de tipo elíptico y parabólico, libre de restricciones sobre la dimensión.

La pérdida de la linealidad en la ecuación suponía un escollo fundamental. Un siglo antes se había observado que las ecuaciones lineales son, por lo general, modelos excesivamente simplificados de los procesos que dicta la física; de hecho, se estudiaron numerosas cuestiones endiabladamente difíciles para estas ecuaciones.

## NASH Y EL PROBLEMA 19 DE HILBERT

En la actualidad, existen muy pocos métodos para determinar las soluciones de las ecuaciones diferenciales no lineales en forma exacta. Las ecuaciones diferenciales no lineales pueden exhibir un comportamiento muy complicado, lo que las hace muy difíciles de resolver. Sin embargo, Nash, que no era un especialista en esta rama de las matemáticas, se enfrentó a estos problemas con determinación.

Antes de empezar su trabajo, se aseguró de que el problema realmente valía la pena y su resolución aumentara su gloria como matemático. Esta cuestión quedaba fuera de toda duda: el estudio de las soluciones de las ecuaciones en derivadas parciales era uno de los grandes problemas matemáticos propuestos por David Hilbert, concretamente el 19. Con el fin de unificar las matemáticas y definir su camino en el futuro, y coincidiendo con el cambio de siglo, Hilbert presentó una lista de problemas en la histórica conferencia que impartió en París el día 8 de agosto de 1900 con motivo del Congreso Internacional de Matemáticos. Todos ellos estaban pendientes de resolución y varios resultarían ser muy influyentes en la matemática del siglo XX.

Hilbert presentó diez de los problemas —concretamente, los números 1, 2, 6, 7, 8, 13, 16, 19, 21 y 22— en aquel acto solemne, que se celebró en medio de una gran expectación en La Sorbona.



La lista completa se publicó más adelante. El problema 19, que eligió Nash como desafío personal, trataba acerca de la existencia y características de las soluciones de los problemas de ecuaciones no lineales en derivadas parciales. Se quería saber si era posible asegurar que existía la solución y sus características; en particular, si las soluciones eran funciones analíticas, lo que significa que fuesen desarrollables en series de potencias. Todo lo cual, entre otras cosas, implicaría que eran funciones de clase $C^{\infty}$. Estos resultados eran conocidos como «teoremas de regularidad».

Nash se volcó por completo en el problema 19, convencido de que si lo resolvía se convertiría en el mayor matemático de su generación y rivalizaría con los genios matemáticos de la historia. Dado que los problemas eran no lineales, Nash se ocupó de ellos de forma lateral, y trató de linealizar el problema. Su idea fue convertir el problema original en otro problema equivalente en lo relativo a sus soluciones, pero que sí fuera lineal, así como usar todas las técnicas conocidas, tanto lineales como no lineales, de resolución. Estaba especialmente interesado en las ecuaciones de tipo parabólico y se aplicó con toda la energía y el talento de que disponía. Al cabo, consiguió su objetivo y probó los teoremas de regularidad para este tipo de problemas. De nuevo, el éxito le sonrió.

## UN CHASCO CONSIDERABLE

El logro conseguido debería haberle proporcionado una gran satisfacción, ya que resolver uno de los problemas de Hilbert lo instalaba directamente en el Olimpo de los matemáticos con solo treinta años. Sin embargo, la hazaña derivó en frustración cuando descubrió, unos meses más tarde, que se le habían adelantado. Un desconocido matemático italiano de la Universidad de Pisa, de nombre Ennio De Giorgi (1928-1996), había resuelto el problema de Hilbert para ecuaciones elípticas y había publicado antes que Nash unos resultados muy cercanos a los que él había obtenido. Si bien Nash lo había logrado para las ecuaciones parabólicas, sus resultados ya no resultaban novedosos y revolucionarios: ahora, eran una generalización de otros resultados anteriores aplicados

a otro caso. Cualquier otro matemático se hubiera sentido igualmente satisfecho por su hallazgo, pero para él supuso un chasco considerable. En su reseña para el Nobel, describió así lo ocurrido:

> Tuve cierta mala suerte, ya que al no hallarme suficientemente informado del trabajo de otras personas en aquel campo, sucedió que estuve trabajando en paralelo con Ennio De Giorgi, de Pisa, Italia, y fue él, verdaderamente, el primero que consiguió llegar a la cumbre, por lo menos en lo referente al caso, particularmente interesante, de las ecuaciones elípticas.

Las razones que explican esta coincidencia fueron el propio método de trabajo de Nash, que nunca leía todo lo que se había escrito sobre un tema, y lo complicado que resultaba en la década de 1950 estar al día de todos los avances de las matemáticas. Hoy en día, los matemáticos que trabajan en áreas cercanas tienen relaciones fluidas y los artículos son accesibles en cuanto se publican a través de Internet, pero en aquella época el acceso a las revistas matemáticas era difícil y solía producirse mucho después de que los artículos hubieran visto la luz. En este contexto, el bloque occidental desconocía los trabajos matemáticos que se desarrollaban en la Unión Soviética y en Europa del Este, que no se traducían ni se divulgaban a causa de la rivalidad existente en la Guerra Fría. Por todo ello, ni siquiera los matemáticos estadounidenses que viajaban regularmente a Europa conocían el trabajo de Ennio De Giorgi.

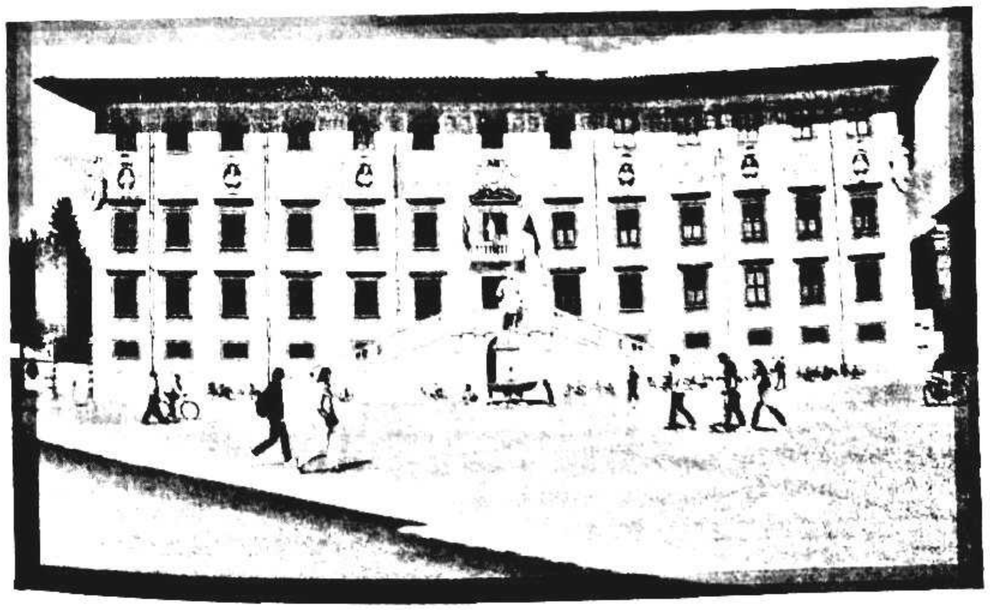
La comunidad matemática reconoció tanto a Nash como a De Giorgi como coautores de los resultados de continuidad que daban respuesta al problema de Hilbert, pero esta distinción compartida no fue suficiente para Nash, frustrado por «haber llegado segundo», solo por unos meses, a una carrera que había arrancado varias décadas antes. Ambos habían alcanzado las mismas conclusiones de manera independiente usando la desigualdad de Harnack, que permitía estudiar la existencia, unicidad y regularidad —número de derivadas continuas— de las soluciones.

En 1960, la demostración, basada en las llamadas estimaciones de De Giorgi-Nash, sería simplificada por Jürgen Moser, por lo que el teorema de regularidad se conoce hoy en día como el teorema De Giorgi-Nash-Moser. No solo está considerado como uno de los resultados matemáticos más influyentes del siglo XX, sino que también se le tiene como el origen del análisis geométrico, es decir, el uso de técnicas de ecuaciones en derivadas parciales para resolver problemas de geometría diferencial.



### ENNIO DE GIORGI, EL ORGULLO DE PISA

El matemático italiano Ennio De Giorgi (1928-1996) publicó su solución del problema de Hilbert para ecuaciones elípticas, que tanto contrarió las ambiciones de Nash, cuando contaba tan solo veinticuatro años y ya trabajaba en la Universidad de Pisa, donde ocuparía la cátedra más prestigiosa de Italia. Dedicado por entero a las matemáticas, vivió prácticamente entre las cuatro paredes de su despacho universitario en medio de una humildad extrema y sin apenas mantener contacto con el exterior. Entre sus mayores contribuciones a las matemáticas cabe destacar todo lo relativo al estudio de superficies mínimas, así como la gran influencia que ejerció sobre las obras de matemáticos posteriores. De carácter místico, dedicó los últimos años de su vida a buscar resultados matemáticos que probasen la existencia de Dios.



Fachada de la Scuola Normale Superiore de la Universidad de Pisa, en la Piazza dei Cavalieri.

POR SER JOVEN Y POR NO HACERLO EN SOLITARIO

Otra consecuencia indeseable para Nash de esta coincidencia fue privarle de su anhelada Medalla Fields, que se concede cada cuatro

### EL PREMIO QUE NASH MERECIÓ Y NUNCA OBTUVO

El nombre oficial de la medalla Fields es el de «medalla internacional para descubrimientos sobresalientes en matemáticas», pero se conoce más por el apellido del matemático canadiense que desarrolló la idea: John Charles Fields (1863-1932). El galardón fue instaurado en 1936 por la Unión Matemática Internacional y fue retomado en 1950, al término de la Segunda Guerra Mundial. La medalla Fields supuso la mayor distinción del gremio hasta la creación del premio Abel en 2003 y, además, una respuesta en toda regla a la inexistencia del Nobel de Matemáticas, ciencia excluida de forma explícita por el propio Alfred Nobel. Aunque la Fundación Nobel tiene potestad para admitir nuevas ramas de las ciencias y, de hecho, introdujo en 1969 el Nobel de Economía, las matemáticas están absolutamente vetadas desde que Alfred Nobel afirmó que no eran una ciencia aplicada y práctica. Al respecto, cuenta la leyenda que la verdadera razón fue el rencor que profesaba a un matemático, al que amaba la mujer de la que él estaba enamorado. Sin embargo, nada prueba que esta versión se ajuste a la verdad.

Anverso de la medalla Fields.

**«Por escritos excelentes»**

La medalla Fields admite hasta cuatro ganadores en cada edición, lo que en raras ocasiones ha sucedido. El premio en metálico que la acompaña ronda los 10 000 euros, muy por debajo de las cantidades que entrega el premio Nobel, y la medalla en sí está chapada en oro. En su anverso figura Arquímedes junto a la inscripción en latín «Ir más allá de uno mismo y dominar el mundo»; en el reverso, junto a una esfera inscrita en un cilindro, se lee igualmente en latín: «Los matemáticos de todo el mundo se reunieron para dar esta medalla por escritos excelentes».



años y justo se otorgaba en 1958. Si los resultados de regularidad hubieran sido fruto de su trabajo en solitario, habría recibido el mayor honor al que entonces aspiraba un matemático. Nash describió sus impresiones al respecto siguiendo el símil de la escalada:

> Parece claro que si uno de los dos hubiera fracasado en su modo de abordar el problema de las estimaciones a priori sobre la continuidad, el escalador solitario que hubiese alcanzado la cima habría recibido la medalla Fields.

Otro factor que apartó a Nash de la medalla Fields es que solo se concede a matemáticos mayores de cuarenta años. Él tenía treinta, y tampoco había urgencia en destacarle. Aun así, su candidatura llegó hasta el final e incluso se barajó la posibilidad de conceder tres premios y galardonarlo junto a los dos ganadores de ese año, el francés René Thom (1923-2002) y el británico de origen polaco Klaus Roth (1925-2015). Pero no sucedió así. Lamentablemente, para cuando se volvió a conceder el premio, en 1962, resultaba inconcebible que Nash fuese siquiera candidato.

## EL MAYOR DE LOS RETOS: LA HIPÓTESIS DE RIEMANN

Estos tropiezos y frustraciones hirieron el ego desmedido de Nash y le obsesionaron con que debía demostrar su enorme talento. Así, pasó por alto que su siguiente reto no obedecía a un campo que dominase como matemático, porque lo único que le importaba ya era que su resolución lo instalara en la gloria y lo encumbrara como el mejor matemático del mundo. Si esa es la idea que anima el trabajo de un matemático, el reto que debe afrontar está muy claro: demostrar la hipótesis de Riemann.

Sin duda, la hipótesis de Riemann no es cualquier cosa, sino palabras mayores: el problema más importante de las matemáticas puras. De hecho, Hilbert la incluyó entre los 23 problemas de su famosa lista y, dada su extraordinaria complejidad, reveló su expectación porque alguna vez fuera resuelta.

La hipótesis se basa en la función zeta de Riemann, que está definida de la siguiente manera:

$$\xi(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

donde $s$ es un número complejo distinto de 1. Esta función tiene valores donde se anula, como en $s=-2$, $s=-4$ y otros, que se conocen como «ceros triviales». Los no triviales son aquellos en que su parte real es mayor estricta que cero, pero menor estricta que 1.

«Si yo me despertara después de haber dormido durante mil años, mi primera pregunta sería: ¿Ha sido demostrada la hipótesis de Riemann?»

— DAVID HILBERT.

Riemann calculó algunos de los ceros no triviales de la función y, a partir de estos cálculos y una profunda compresión de la función zeta, conjeturó que la parte real de todo cero no trivial de la función es 1/2. Esta afirmación es conocida como la «hipótesis de Riemann». La conjetura supone la puerta de entrada a la solución de numerosos problemas matemáticos, de los que el más famoso es el que calcula el número de primos que son menores que un número dado. En la actualidad, el problema sigue pendiente de resolución, porque la mayor potencia de cálculo de los ordenadores actuales ha permitido calcular muchos millones de soluciones no triviales y en todas las soluciones la parte real vale 1/2, como conjeturó Riemann, por lo que no se ha podido refutar.

Nash, que ya había empezado a hablar de este problema a principios de 1958, comentó a algunos de sus colegas que tenía algunas ideas para abordarlo, pero estos le insistieron en que era imposible resolverlo y le desaconsejaron siquiera intentarlo. Existía el consenso generalizado de que semejante empeño debía posponerse para las matemáticas del siglo XXI. Sin embargo, Nash no se amilanó y, totalmente obcecado, se consagró por completo



**BERNHARD RIEMANN**

El matemático alemán Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) estudió en las universidades de Gotinga, donde fue alumno destacado de Gauss, y Berlín. Se doctoró en 1851 con una tesis sobre la teoría de las variables complejas, en la que introdujo los métodos topológicos. Aunque sus obras fueron escasas, contribuyeron decisivamente a numerosas ramas de las matemáticas, al extremo que diversos conceptos matemáticos tomaron su apellido. Su aportación más conocida fue la geometría no euclidiana, recogida en su memoria *Sobre las hipótesis que sirven de fundamento a la geometría*. Fatigado por el exceso de trabajo y víctima de una grave afección pulmonar, falleció a causa de la tuberculosis cuando aún no había cumplido los cuarenta años de edad. A modo de curiosidad, cabe señalar que en su juventud estudió hebreo e intentó demostrar mediante razonamientos matemáticos que el libro del Génesis era cierto.

a intentar resolver el problema. Su ambición, desde luego, carecía de límites, por lo que no es de extrañar que en el mes de julio, poco después de cumplir los treinta años de edad, la revista *Fortune* lo definiera como una de las estrellas más brillantes en el campo de las matemáticas.

Por desgracia, en esta ocasión sus aspiraciones se revelaron desmesuradas y comenzaron a hacerse pedazos a finales de 1958, cuando su mente empezó a experimentar los primeros síntomas de la esquizofrenia que solo unos meses después devastaría su vida. Nunca se sabrá si la enfermedad que sufrió Nash impidió que se avanzase en la verificación de la hipótesis de Riemann. Posteriormente, cuando recuperó la razón, ni siquiera recordaba haberse dedicado a pensar sobre cómo resolverla.

CAPÍTULO 5

# Locura, cordura y reivindicación: el triunfo final de Nash

En 1959, Nash padeció un trastorno mental severo que le sumió en una profunda oscuridad y cortó de raíz su prodigiosa carrera matemática, reducida a unas escasas pero valiosas contribuciones. Tres décadas después, una vez recobrada la cordura, sus trabajos fueron reivindicados, recibió los premios y elogios que tanto se le habían resistido y comprobó con satisfacción la vigencia y el futuro de su legado.

A finales de julio de 1958, Nash y Alicia pudieron disfrutar de su viaje de luna de miel. El destino fue Europa, con parada especial en la ciudad escocesa de Edimburgo: allí se celebraba el Congreso Mundial de Matemáticas, donde se entregarían las medallas Fields y Nash estaba invitado a dar una conferencia. El matrimonio pasó primero por París, luego cruzó los Pirineos en coche para visitar España y siguió una ruta por Italia, Bélgica y Suecia. Todo marchaba por buen camino para la pareja, salvo las frustraciones profesionales que abrumaban a Nash, exhausto por sus esfuerzos para probar la hipótesis de Riemann y descontento porque no daban fruto. De vuelta al MIT, Nash supo que Alicia estaba embarazada, lo que le llenó de satisfacción, pero también de una honda inquietud. Ahora, lo único que le preocupaba era conseguir un trabajo estable en el Instituto, fin para el que Tucker efectuaba gestiones que parecían bien encauzadas; contaba, además, con una propuesta de la Universidad de Chicago, que quería reforzar su departamento de matemáticas.

Por otra parte, Nash anhelaba pasar una estancia de investigación en el Instituto de Altos Estudios Científicos, el equivalente francés al Instituto de Estudios Avanzados; un propósito que, de realizarse, le ocuparía parte del siguiente año. La razón es que tenía mucho interés en colaborar con Jean Leray (1906-1998), un especialista francés en ecuaciones diferenciales y topología. Aun-

que no es posible precisar los motivos que alteraron su personalidad, este cúmulo de cambios, emociones y decisiones pendientes pudo afectar notablemente al ánimo de Nash, sometido a grandes tensiones. A finales de 1958, se manifestaron los primeros signos de que padecía un problema de salud mental, si bien su carácter excéntrico no ayudó a identificarlos.

## EN LOS ABISMOS DE LA MENTE

El problema se fue agravando en las primeras semanas de 1959, cuando sus comportamientos peculiares dieron paso a episodios patológicos. Nash empezó a tener conversaciones sin sentido y a escuchar voces en su interior que le decían que estaba llamado a remediar los graves problemas de la humanidad y ser decisivo para la paz mundial. También estaba convencido de que recibía comunicaciones de gobiernos extranjeros, e incluso de extraterrestres, a través de los periódicos o la radio, y que solo él podía descifrarlos. En palabras de su esposa, Alicia, «realmente, su personalidad pareció cambiar en el espacio de una semana o así. Sucedió muy rápido».

Nash, poco después del comienzo del nuevo año, clamó por las dependencias del MIT que unos poderosos extraterrestres le estaban mandando mensajes codificados a través del *New York Times* y querían destruir su carrera, al igual que las organizaciones internacionales, que también le atacaban. Otro día, interrumpió una lectura para informar que había salido en la revista *Life* disfrazado como el papa Juan XXIII, y que lo sabía porque el 23 era su número primo favorito. No tardó en alertar de que los miembros de una organización secreta comunista campaban a sus anchas por el campus, pero que él había conseguido desenmascararlos al resolver su patrón: todos ellos lucían lazos rojos. Por último, rechazó la oferta de la Universidad de Chicago alegando que estaba prácticamente destinado a convertirse en emperador de la Antártida. El propio Nash, muchos años más tarde, declaró que sus «trastornos mentales surgieron en los primeros meses de 1959, a la par que sucedió que Alicia estaba encinta».



También admitió que su temor a la mediocridad profesional le había hecho embarcarse en proyectos demasiados ambiciosos que le dejaron extenuado. Nash empezó a obsesionarse con que sus colegas trataban de robarle los trabajos matemáticos.

> «Estaba realizando algunos progresos profesionales, pero no estaba en la cima. No tenía el máximo reconocimiento que creía merecer. Me imaginaba como alguien de primer nivel, la persona más importante del mundo, y que gente como el Papa o el presidente eran mis enemigos y trataban de hundirme.»
>
> — JOHN FORBES NASH.

Esta actitud se reforzó cuando Nirenberg, con el que había colaborado en el Instituto Courant, ganó el premio Bôcher de 1959, otorgado por la Sociedad Americana de Matemáticas. Nash se sentía, como mínimo, a su nivel. En este estado de agitación, aceptó dar conferencias en las universidades de Columbia y Yale, con resultados desastrosos: fue incapaz de hablar de forma coherente y divagó sobre temas ajenos a sus trabajos, lo que alarmó a los oyentes. Mientras tanto, Tucker le consiguió una plaza permanente en el MIT, pero esta fue efímera: su aguda crisis nerviosa obligó a destituirlo ese mes de febrero. Al principio, Alicia trató de mantener en la intimidad los problemas de su marido, pero una de esas noches Nash pintó lunares negros por las paredes de su dormitorio. Al agravarse los síntomas, Alicia, embarazada, temió por su integridad física y por la del propio Nash, así que pidió ayuda a la dirección del MIT. Los psiquiatras del centro evaluaron a Nash y determinaron que debía ser internado a la mayor brevedad y tratado por especialistas, incluso sin su consentimiento.

### «VÍCTIMA DE UNA CONSPIRACIÓN».

A principios de abril de 1959, Nash fue ingresado en el hospital McLean, un sanatorio de alto nivel en las afueras de Boston. El

personal se dirigía a él como «profesor» y su tratamiento incluyó sesiones de psicoanálisis. Nash explicaría más tarde que «sabía que estaba allí en observación, pero pensaba que era como la víctima de una conspiración». También añadió que «en la locura, me vi a mí mismo como una suerte de mensajero, o que tenía una misión especial. Como el concepto que tienen los musulmanes de Mahoma, el mensajero de Alá». Su enfermedad fue diagnosticada como esquizofrenia paranoide, una enfermedad mental muy grave que afecta a la personalidad del individuo y a áreas de su psicología. La paranoia le hacía creer que era vigilado y perseguido por enemigos que procuraban dañarlo y arrebatarle su trabajo.

En un primer momento, acorde a las teorías de tipo freudiano, que rechaza la psiquiatría moderna, se achacó su enfermedad a una homosexualidad latente no asumida. Se le administró Torazina, un antipsicótico con propiedades neurolépticas y tranquilizantes que evita los delirios persistentes en el tiempo y que, por sus efectos secundarios, está prohibido actualmente en Estados Unidos y Europa. Sin embargo, en aquel tiempo era el tratamiento más eficaz que se conocía.

Nash fue visitado en el hospital por su madre, su esposa y, esporádicamente, por colegas como Levinson, Moser y Newman, a los que costaba comprender que alguien tan inteligente y capaz pudiera desarrollar en su mente ideas tan disparatadas. A la pregunta de cómo era posible que creyera semejantes ilusiones y se las tomara tan en serio, Nash respondió que estas le llegaban de la misma manera que sus ideas matemáticas, y que por eso eran reales. Debe precisarse que Nash nunca tuvo alucinaciones visuales, un tipo de síntomas que aparece en la película *Una mente maravillosa* y que él negó haber padecido: «Esas cosas no estaban en mi mente, yo solo oía voces». Lo cierto es que las enfermedades mentales son independientes de un menor o mayor grado de desarrollo intelectual. Una persona puede ser un genio y desarrollar una patología psiquiátrica. Por otro lado, los resultados matemáticos de Nash eran fruto de su capacidad de ver propiedades y relaciones que el resto de la comunidad científica ni siquiera intuía, y que no creía ciertas, hasta que él las demostraba y todos quedaban asombrados.



Nash estaba muy decepcionado con el comportamiento de su esposa y sus compañeros, a los que responsabilizaba de su internamiento dentro de una increíble conspiración contra su persona. Durante su estancia en el hospital, contrató a un abogado que le aseguró que saldría de allí al cumplirse cincuenta días de su internamiento, cuando el episodio agudo de la enfermedad hubiera pasado. Así, Nash fue dado de alta el 27 de mayo, justo una semana después del nacimiento de su hijo, que se perdió. Alicia no quiso dar nombre al bebé a la espera de que su padre se recuperara y decidiera. Esta situación provisional se alargó casi un año; al cabo, fue llamado John Charles Martin Nash. El destino quiso que también fuera matemático y sufriera esquizofrenia.

## NUEVE MESES CAÓTICOS POR EUROPA

Al dejar atrás el hospital McLean y en el espacio de una pocas semanas, Nash sacó todo el dinero de su fondo de pensiones, renunció al MIT para siempre y anunció que se marchaba a Europa, donde realizaría una estancia de investigación en Francia con el citado Jean Leray. Alicia, que temía las consecuencias de este viaje, logró convencerle de que debía acompañarle y dejó al recién nacido con sus padres. En su fuero interno, deseaba que aquella experiencia sirviera a Nash para olvidar sus obsesiones y recuperarse, pero el resultado no pudo ser peor: al llegar a París, las calles bullían de disturbios, huelgas y manifestaciones contra la carrera armamentística nuclear, lo que aumentó los delirios de su marido.

Poco después, en Suiza, Nash se obsesionó con renunciar a la nacionalidad estadounidense. Como explicaría varias décadas después: «Fui a Ginebra y pensé la manera de convertirme en refugiado. Tenían el lema "Ciudad de refugio". Imaginé un mundo oculto donde los comunistas y anticomunistas eran realmente lo mismo, una suerte de conspiradores. Se me ocurrió que algunas personas, como Eisenhower y el Papa, y los poderes fácticos, podrían ser desagradables conmigo». Nash intentó en vano obtener el estatus de refugiado y ciudadano del mundo en Suiza, Francia, Luxemburgo e incluso Alemania del Este, tras lo que optó por destruir su pasaporte.

En esta fase de la enfermedad no paró de exponer sus disparatadas ideas sobre cómo gobernar el mundo a sus colegas y a grandes personalidades, en un aluvión de cartas que incluían juegos matemáticos con números. Nash, hábil con la aritmética desde edades tempranas, llenaba sus escritos de relaciones matemáticas entre números que, según su visión, demostraban la verdad de sus ideas. Después de nueve meses deambulando por Europa, la situación se hizo insostenible y el Gobierno francés ordenó arrestarlo y expulsarlo de vuelta a Estados Unidos. Aunque regresó en avión, Nash aseguró que lo habían trasladado en un barco de esclavos, encadenado.

## OTRO HOSPITAL, OTRO MÉTODO AGRESIVO

En 1961, Nash contaba treinta y tres años de edad y estaba muy enfermo. Había dejado de cuidarse y paseaba con ropa desaliñada, pelo largo, barba y un cuaderno en la mano que había titulado *Cero absoluto*. Alicia se fue vivir a la casa de sus padres, que cuidaban del hijo del matrimonio, en Washington, y Nash regresó a Princeton, donde le habían ofrecido colaborar con Morgenstern. Lógicamente, este arreglo no llegó a buen puerto, ya que se rebeló incapaz de llevar a cabo la más mínima actividad productiva. Alicia le visitó en alguna ocasión y comprobó que necesitaba ser internado de nuevo, de lo que Nash fue convencido por su madre y su hermana. Desechada la opción de un hospital privado por su alto coste económico, fue ingresado en el hospital público de Trenton, en Nueva Jersey. Este sanatorio, muy saturado y atendido por unos pocos médicos sin mucha experiencia, abogaba por el uso de insulina en los tratamientos. De esta manera, durante un mes y medio, Nash recibió inyecciones con dosis de insulina que le producían un coma hipoglucémico, con enorme malestar y dolores, para ser «devuelto a la vida» con una inyección de glucosa. Así, cinco días a la semana.

Este tratamiento, que puede parecer cruel pero se tenía como muy efectivo, se utilizaba como última posibilidad y a modo de revulsivo en pacientes muy graves, para devolverles algo de cordura. La idea científica que lo sustentaba era que el cerebro, privado de la energía que lo hace funcionar, detiene su actividad y se reinicia de mejor manera que antes. Es un método muy arriesgado y puede producir daños en la memoria y otras capacidades cognitivas, e incluso la muerte, por lo que se considera inaceptable dentro de los protocolos médicos actuales. En cualquier caso, pareció que los síntomas más graves remitían y Nash fue dado de alta a mediados de julio.

## UN AMAGO DE LUCIDEZ: LAS ECUACIONES DE NAVIER-STOKES

A pesar de estas terribles condiciones, Nash volvió a pensar con claridad en matemáticas durante su estancia hospitalaria. De nuevo, el problema que eligió cumplía el requisito de ser una cuestión abierta y esquiva durante décadas para los matemáticos: las ecuaciones de Navier-Stokes. El problema de Navier-Stokes trata de definir, mediante ecuaciones diferenciales, el movimiento de las partículas de un fluido que se considera que no se puede comprimir. Como la hipótesis de Riemann, tenía una dificultad extraordinaria, y aún figura en las dos listas más famosas de problemas matemáticos: la de David Hilbert y la del Instituto Clay.

Se puede decir que la teoría matemática de la dinámica de fluidos arrancó en el siglo XVII con los trabajos de Isaac Newton. Más tarde, el matemático y físico suizo Leonhard Euler (1707-1783) escribió por primera vez las ecuaciones diferenciales que definen el fenómeno. Finalmente, el ingeniero y físico francés Claude-Louis Navier (1785-1836) y, de forma independiente, el físico y matemático irlandés George Gabriel Stokes (1819-1903), introdujeron en el modelo el término de viscosidad y llegaron a las denominadas «ecuaciones de Navier-Stokes». El fluido a través del comportamiento de una partícula en cada punto $x$ del espacio en el tiempo $t$, se caracteriza por las siguientes funciones:

$\mathrm{u}(x,t)$ que determina la velocidad.
$\rho(x,t)$ que da la densidad.
$\mathrm{p}(x,t)$ que describe las presiones.

Para definir la posición de la partícula $x$ se necesita definir tres coordenadas en el espacio. Al usar la segunda ley de Newton, que relaciona la fuerza con la masa y la aceleración y la ley de conservación de masa, junto con la incompresibilidad, se tiene:

$$\rho\left(\frac{du}{dt}+u\nabla u\right)=-\frac{dp}{dx}+\nu\nabla u+f_{\in}$$
$$\nabla u=0$$
$$\rho+\nabla\rho=0,$$

donde $\nu$ es una constante que define la viscosidad y $f_{\in}$ es una fuerza externa.

Como la función $u$ tiene tres variables, la primera ecuación se puede descomponer en tres, por lo que se tienen cinco ecuaciones con cinco incógnitas.

El problema que recoge el Instituto Clay se ocupa de la existencia de soluciones de ese problema, es decir, si se puede afirmar que existe solución siempre o es posible hallar un contraejemplo para el que no existe solución. Nash no resolvió completamente el problema de las ecuaciones de Navier-Stokes, que sigue abierto, pero introdujo herramientas y consideraciones muy útiles para investigaciones posteriores. De hecho, su artículo «Le problème de Cauchy pour les équations différentielles d'un fluide général» (1962), —«El problema de Cauchy para las ecuaciones diferenciales de un fluido general»—, fue publicado en el *Bulletin de la Société Mathématique de France* y resulta de lectura obligada para quienes se acerquen al estudio de estas ecuaciones.

Este período de relativa lucidez duró poco y Alicia rogó a sus padres que se mudaran a vivir con ella, porque no podía seguir cuidando sola del niño y de Nash. Este la siguió culpando de sus ingresos en hospitales psiquiátricos, por lo que la relación matrimonial se deterioró a pasos agigantados.

## DIVORCIO Y RECAÍDA

Nash se apuntó a clases de francés, un idioma que le gustaba, y en junio de 1962 volvió a Francia para seguir investigando con Jean



### LOS PROBLEMAS DEL MILENIO

El enigmático Grigori Perelman, en 2006.

Para celebrar la llegada del siglo XXI, el Instituto Clay, una fundación altruista de Massachusetts, seleccionó siete problemas matemáticos que habían resistido todos los intentos de resolución y decidió premiar la solución de cualquiera de ellos con un millón de dólares. Se pretendía con ello emular la célebre lista de David Hilbert del año 1900, con la que solo comparte dos problemas: la hipótesis de Riemann y las ecuaciones de Navier-Stokes. La lista que propuso el Instituto Clay fue la siguiente:

1. El problema central de las ciencias de la computación: P versus NP. Se relaciona con la complejidad algorítmica y fue formulado por el matemático estadounidense Stephen Cook en 1971.
2. Conjetura de Hodge. Se relaciona con la descomposición de variedades algebraicas complejas en subvariedades más simples. El reto es probar o refutar si es posible construir siempre las variedades complejas a partir de formas simples.
3. Conjetura de Poincaré. Fue propuesto en 1904 por el matemático francés Henri Poincaré (1854-1912) y en su expresión más simple dice que solo hay una variedad cerrada y simplemente conexa de dimensión 3: la esfera tridimensional.
4. Hipótesis de Riemann. Afirma que la parte real de los ceros no triviales de la función zeta de Riemann valen 1/2.
5. Problema de la masa en las teorías de Yang-Mills. Planteado como un problema matemático, se refiere al estudio de las ecuaciones de Yang-Mills, vitales en la unificación de la electrodinámica cuántica con la teoría electrodébil.
6. Ecuaciones de Navier-Stokes. El estudio de la existencia de soluciones para las ecuaciones básicas del movimiento de los fluidos incompresibles.
7. Conjetura de Birch y Swinnerton-Dyer. Conduce al estudio del carácter infinito o finito del número de soluciones racionales de una curva algebraica elíptica o de género 1.

El único problema resuelto hasta la fecha es la conjetura de Poincaré, demostrada de forma correcta en 2003 por Grigori Perelman. Este enigmático genio ruso rechazó el millón de dólares y, más tarde, la medalla Fields. Asimismo, dijo estar consagrado a demostrar matemáticamente la existencia de Dios.

Leray. En esta ocasión, la abnegada Alicia ya no le acompañó; seis meses después se hizo efectivo el divorcio. La segunda estancia francesa de Nash estuvo llena de excentricidades y muestras de desequilibrio mental, como le sucedió durante una charla en el Colegio de Francia, una de las instituciones más prestigiosas de enseñanza superior del mundo. Muy enfermo, Nash aceptó regresar a Princeton, donde supo que Jürgen Moser, con el que rivalizó durante toda su carrera, acababa de ganar la medalla Fields de 1962. Este hecho le enfureció y alimentó sus delirios.

Ante su lamentable estado, Tucker recaudó fondos para ingresarlo en una clínica, pero Nash se opuso de manera enérgica. Su familia intervino de nuevo y lo llevó al hospital psiquiátrico Carrier, una clínica privada cercana a Princeton. En esta institución se aplicaban técnicas de electrochoque a los enfermos de esquizofrenia, pero la familia se negó rotundamente a que Nash los recibiera. Finalmente, fue tratado con medicamentos antipsicóticos. Estos parecieron funcionar por un tiempo, con lo que Nash ingresó y fue dado de alta en varias ocasiones durante los meses siguientes.

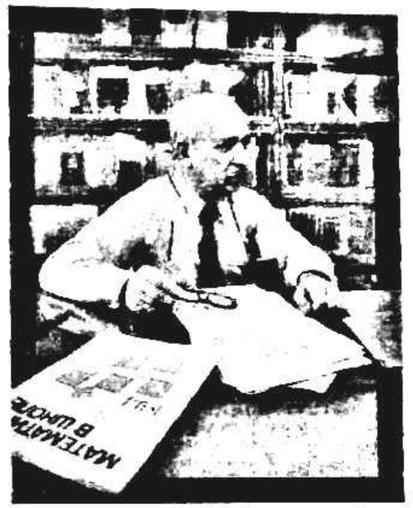
A su salida, ya divorciado de forma oficial, fue acogido temporalmente por la Universidad Brandeis de Boston, un centro muy por debajo de Princeton y el MIT. Allí, sorprendentemente, logró terminar el artículo «Analyticity of Solutions on Implicit Function Problems with Analytic Data» —«Análisis de soluciones de los problemas de la función implícita con datos analíticos»—, que fue publicado en *Annals of Mathematics* (1966). Sus aportaciones al problema de la función implícita, un clásico en los resultados matemáticos, son notables e increíbles para una persona en su estado.

## LA CONJETURA SOBRE LAS SINGULARIDADES

El deterioro de su estado en soledad precipitó su vuelta a Princeton, donde de nuevo fue acogido con una calidez y sensibilidad poco frecuente en un mundo tan competitivo como el de la investigación. También llama la atención que Nash, dentro de su mente perturbada, continuara teniendo ideas sobre matemáticas de alto nivel. Siempre le habían interesado las singularidades de las variedades y, de hecho, con el humor que siempre le caracterizó, en más de una ocasión se calificó a sí mismo como una singularidad. Aunque de manera general las singularidades son los puntos en los que la variedad no es diferenciable, hay algunas singularidades especiales que despiertan gran interés entre los matemáticos: las

### ¿SE PUEDE MEDIR LA CALIDAD DE UN ARTÍCULO CIENTÍFICO?

La respuesta a esta pregunta es que no existe una forma objetiva que permita determinar la calidad de una publicación científica, si bien hay maneras de aproximarse y hacer algún tipo de estimación. Estas valoraciones se efectúan desde dos puntos de vista: a través de la revista donde está publicado el trabajo, y sobre la aceptación que tiene el propio trabajo en la comunidad investigadora. El índice más usado es el factor de impacto *Journal Citation Report* (JCR), una medida de calidad científica para evaluar las revistas académicas. Proporcionado en la actualidad por la empresa Thomson Reuters, es un índice de calidad relativo (ICR) que establece *rankings* de revistas en función de la métrica obtenida. No mide la calidad de un artículo, sino de la revista en la que se publica. Se obtiene dividiendo el número de citas que en un año dado ha recibido una revista para los dos años anteriores por la cantidad de artículos publicados por una revista. Este índice cambia cada año y permite establecer un *ranking* entre las revistas de cada área. Obviamente, cuanto más alta se sitúa la revista en esta escala, más difícil resulta publicar en ella; de hecho, con solo aparecer en este índice, aumenta su visibilidad en la comunidad científica. Otra medida, individual para cada trabajo, es contar las citas que aparecen en los artículos posteriores. La idea es que un trabajo que ha permitido avanzar a la ciencia y es muy usado por otros investigadores tiene gran importancia para el área donde se ha publicado. Como es lógico, esta valoración se efectúa en los años posteriores a su publicación y no resulta tan inmediata como la clasificación JCR, que se realiza con la revista.



**Las revistas matemáticas especializadas se rigen por ciertos baremos de calidad.**

que provienen, por así decirlo, de una deformación de una variedad lisa. Si se retuerce completamente un cilindro, el punto entre los dos conos resultantes es una singularidad de este tipo. Los fenómenos en que aparecen cambios instantáneos de comportamiento tienen singularidades: la formación de tornados en la atmósfera, cuando el metal se rompe al ser sometido a altas presiones o cuando el espacio-tiempo se curva tanto que se forma un agujero negro.

La primera pregunta que Nash se planteó contestar fue si todas estas singularidades especiales provenían de la deformación de una variedad. ¿Es posible, por ejemplo, revertir la acción y encontrar una variedad sin singularidades que pueda ser comprimida para generar la singularidad? En 1964, el matemático japonés Heisuke Hironaka demostró que este problema tiene respuesta positiva en algunos casos, lo que seis años más tarde le valdría la medalla Fields. Este resultado tuvo como consecuencia que Nash escribiera en uno de sus crípticos mensajes:

$N^5+I^5+X^5+O^5+N^5=0$. ¿Puede resolver Hironaka esta singularidad?

Nash estuvo pensando en otras cuestiones, en el sentido de que creía que existía una relación entre la singularidad y las trayectorias que la atraviesan. Estas trayectorias surgen de considerar los recorridos de una canica microscópica rodando por el interior de la variedad en la cercanía de la singularidad. Conjeturó que en los objetos de dos dimensiones, es decir, en superficies, hay una correspondencia perfecta entre la singularidad y las trayectorias, lo que se conoce en matemáticas por una caracterización. Es decir, si se conoce la singularidad se pueden determinar las trayectorias y, lo que es más interesante, sabiendo las trayectorias se puede definir la singularidad. Nash también sugirió estudiar esta relación en dimensiones superiores.

Nash escribió sus ideas sobre la cuestión, pero no llegó a publicarlas. Hubo que esperar hasta el año 1995 para que la denominada «conjetura de Nash sobre singularidades» viera la luz públicamente, gracias a un número especial que la revista *Duke Journal of Mathematics* dedicó a su legado matemático. La forma habitual de calcular las trayectorias es estudiar la variedad en el entorno

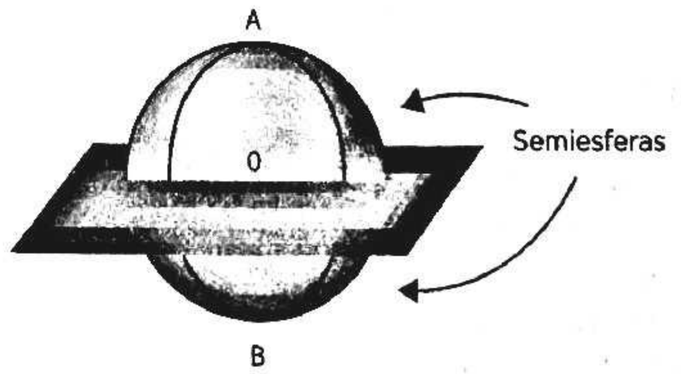


### ¿CÓMO SE LE HACE UNA TAC A UNA VARIEDAD?

La tecnología que permite una tomografía axial computarizada (TAC) tiene una base matemática: la transformada de Radon, formulada en 1917 por el matemático austríaco Johann Radon (1887-1956). La idea general es que se tiene una figura geométrica, como es una variedad, se corta con un plano y se mira la figura que se crea. La dificultad es que la variedad no tiene que estar definida en un espacio de tres dimensiones en el que el plano de corte tiene dos. Las variedades se pueden definir en cualquier dimensión. El plano de corte en el caso general se llama hiperplano y tiene una dimensión menos que el espacio donde se define. Las ecuaciones de los hiperplanos son fáciles de manejar porque siempre se definen como una sola ecuación lineal. En el caso del plano, la ecuación $y=ax+b$ define un hiperplano. En el del espacio, la ecuación $z=ax+by+c$ define un plano. Las variedades también se definen a través de ecuaciones; por lo tanto, el corte que se busca es la solución del sistema de ecuaciones que se crea al añadir la ecuación del hiperplano a las propias ecuaciones de la variedad.

**Un ejemplo simple**

Considérese una variedad como la esfera de centro el punto (0,0,0) y radio 1, que se define por la ecuación $x^2+y^2+z^2=1$. El siguiente paso es añadir a la ecuación que se tiene un hiperplano. Considérese el plano de altura cero que corta la esfera por la mitad en dos semicircunferencias, que está descrito por la ecuación $z=0$. Al resolver el sistema queda $x^2+y^2=1$, que es la ecuación de una circunferencia de radio 1. Nada sorprendente, porque es un hecho conocido que al cortar una esfera por un plano se obtiene una circunferencia.




Para dar un nuevo corte de forma paralela al anterior tomamos ahora el plano $z=0,5$. Con lo que se obtiene $x^2+y^2=0,75$, que es la circunferencia de radio $\sqrt{0,75}$, la misma figura con un radio menor, lo que de nuevo coincide con la intuición. El proceso puede iterarse tanto como se desee y con la separación de cortes que se requiera.

de la singularidad. Para conseguir este objetivo se hacen cortes cada vez más cerca del punto que interesa, para hacerse una idea de cómo se comporta la variedad en el entorno del punto. Se trata de llegar a la singularidad mediante un proceso de aproximaciones sucesivas. La idea es la de realizar, como en medicina, una tomografía axial computarizada, más conocida por sus siglas TAC.

En 2003, el matemático húngaro János Kollár y su colega japonés Shihoko Ishii construyeron un contraejemplo válido para dimensiones mayores que cuatro, con lo que probaron que la conjetura de Nash no era cierta en esos casos. Sin embargo, en el caso de dos dimensiones, que fue el que generó la intuición de Nash, la conjetura ha resultado ser verdadera. En 2011, los matemáticos españoles Javier Fernández de Bobadilla y María Pe Pereira hallaron una demostración que probaba la conjetura de Nash: «Hemos resuelto el problema de Nash con técnicas sorprendentemente sencillas, casi elementales. Por supuesto, nos basamos en desarrollos previos de otros investigadores». Las técnicas podían ser sencillas, pero la idea que les había conducido a usarlas era brillante. Para el caso de tres dimensiones, el problema sigue abierto.

## LA RECUPERACIÓN DE UN HOMBRE Y SU LEGADO

Entre 1962 y 1970, Nash, en completa soledad y víctima de sus trastornos, atravesó un período errático según tomaba o dejaba su medicación. Afortunadamente, Alicia volvió en su socorro en 1970 y se quedó a vivir con él en Princeton, para cuidarlo y atenderlo en su enfermedad el resto de su vida. Todas las biografías y testimonios coinciden en que, con esta decisión, le salvó la vida. Aun así, durante los siguientes veinte años, Nash se desenvolvió como un fantasma que habitaba la Universidad de Princeton, encerrado en los laberintos de su enfermedad.

No obstante, en esas mismas dos décadas sus trabajos cambiaron la manera de abordar los problemas matemáticos; en particular, los nuevos análisis económicos avanzaban gracias a sus ideas sobre juegos cooperativos. De hecho, sus artículos fueron



citados en centenares de trabajos de economía, pero la comunidad científica pensaba que eran resultados obtenidos por una persona que había fallecido: Nash no tenía trabajos posteriores, y nadie lo había visto en congresos o reuniones científicas.

A principios de la década de 1990 la situación empezó a revertirse y, poco a poco, Nash, que sentía que los fármacos no le dejaban pensar con claridad y dejó de medicarse, recobró la cordura. Este proceso no es milagroso ni excepcional, pues los enfermos de esquizofrenia no son pacientes incurables y casi un tercio de ellos terminan por recuperarse y tener una vida relativamente normal. El propio Nash narró que hizo un esfuerzo racional por rechazar los pensamientos que le atormentaban y las ideas que le habían arrojado a la locura. De forma gradual, reinició el contacto con sus colegas y dio muestras de una gran mejoría.

### LOS GRANDES RECONOCIMIENTOS

En 1994, cuando el comité de los premios Nobel de Economía evaluó a los posibles candidatos de aquel año, pensó reconocer la aportación de los investigadores de la teoría de juegos, una rama de las matemáticas que había dotado de base científica a los análisis económicos. Dentro de ella se quería distinguir, sobre todo, las aportaciones de los juegos no cooperativos. En este contexto, Nash debía ser uno de los ganadores, pero llevaba desaparecido del mundo académico casi treinta años. Una vez verificado que seguía con vida, se planteó la cuestión de si estaba en condiciones de recibir el premio. El comité, no sin pocas controversias, decidió que sí. Finalmente, el 10 de diciembre de 1994, Nash, a la edad de sesenta y seis años, recibió el Nobel de Economía junto al profesor y economista estadounidense John Harsanyi (1920-2000), de origen húngaro, y el economista y matemático alemán Reinhard Selten (1930-2016). El rey de Suecia se dirigió a él con estas palabras: «Doctor John Nash, su análisis del equilibrio en juegos no cooperativos y el resto de sus contribuciones a la teoría de juegos han tenido un profundo efecto en el camino que ha desarrollado la teoría económica en las últimas dos décadas». A estos elogios se

sumó su colega Harsanyi, al afirmar que «nadie hubiera predicho el gran impacto del equilibrio de Nash en la economía y en las ciencias sociales en general, y aún era menos previsible que el concepto de punto de equilibrio llegara a tener algún significado para la teoría biológica». En cuanto a los temores acerca del comportamiento de Nash en todo lo referente al premio, estuvieron infundados: las recepciones, los encuentros con la prensa, la propia ceremonia de entrega del premio y la conferencia posterior se desarrollaron con completa normalidad.

«Estadísticamente, resulta improbable que cualquier matemático o científico, a la edad de sesenta y seis, pueda ser capaz de continuar sus esfuerzos de investigación y añadir algo a sus logros previos».

— JOHN FORBES NASH.

Nash no quiso hablar de su enfermedad cuando recibió el Nobel, pero en el X Congreso Mundial de Psiquiatría, celebrado en Madrid en agosto de 1996, relató la dolorosa experiencia de la enfermedad que le había anulado la mente durante la mitad de su vida. Definió los delirios que había sufrido como un sueño del que no se despierta, declaró que «recobrar la racionalidad después de ser irracional causa mucho dolor», y se comparó con un músico que no puede volver a componer: «Yo no me siento recuperado si no puedo producir cosas buenas en mi trabajo».

En la primavera de 2001, treinta y ocho años después de divorciarse, Nash y Alicia volvieron a casarse y se aprestaron a llevar una vida lo más tranquila posible. Unos meses más tarde, el 21 de diciembre, se estrenó en Estados Unidos la película *Una mente maravillosa*, que tanto contribuyó a que el mundo conociera los logros y sufrimientos de un matemático extraordinario. El éxito mundial de filme reavivó el interés por la obra de Nash, de lo cual se hicieron eco los grandes medios de comunicación; las revistas y publicaciones especializadas ya llevaban años haciéndolo. El impresionante legado matemático de Nash había vuel-

John Forbes Nash, en una imagen tomada en la Universidad de Princeton en 1994. Ese año fue galardonado con el Nobel de Economía, lo que renovó el interés por sus hallazgos matemáticos y contribuyó a que su nombre no cayera en el olvido.

to para quedarse definitivamente, despertar el asombro de quien se acercara a él y abrir nuevos horizontes a quienes lo retomaran. Con todo ello, Nash recibió al final de su vida los reconocimientos que había perseguido con tanto ahínco en su juventud. Así, en el año 2015 obtuvo el premio Abel, el más parecido al Nobel que puede conceder la comunidad matemática, junto a su colega Louis Nirenberg, con quien tanta charlas provechosas compartió en el Instituto Courant. Por desgracia, el 23 de mayo de 2015, pocos días

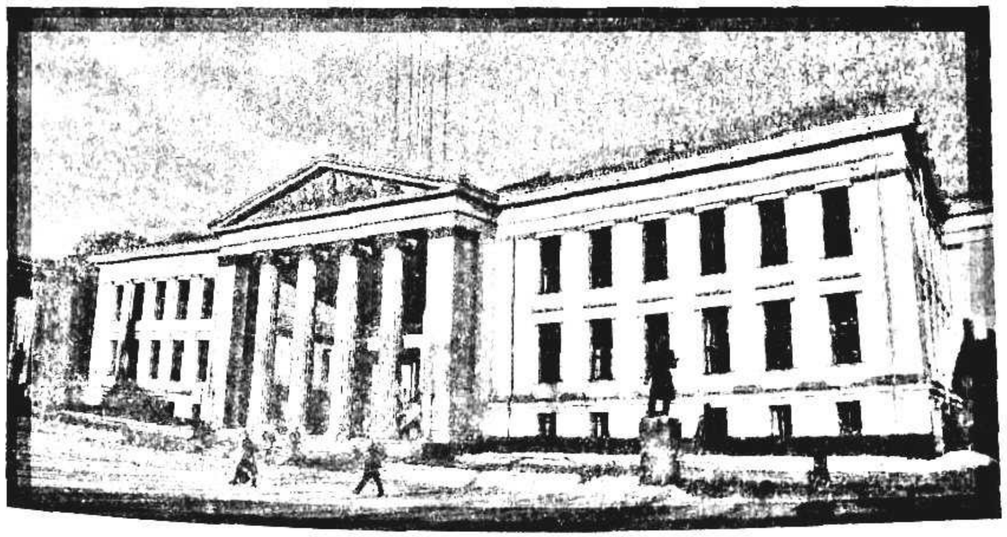
### EL PREMIO NOBEL DE ECONOMÍA

El premio Nobel de Economía fue instaurado en 1969 y se diferencia del resto de galardones concedidos por la Fundación Nobel en que lo otorga y sufraga el Banco de Suecia —el más antiguo de los bancos centrales— en memoria de Alfred Nobel, ya que este negó galardón alguno para esta disciplina en su testamento. Su dotación económica es idéntica a la de los premios Nobel, y también coincide con ellos en que se entrega en las mismas fechas y no permite más de tres ganadores cada año. Como sucedió con Nash en 1994, no es infrecuente que lo reciban personas sin apenas formación académica en economía. Por otra parte, numerosos matemáticos han sido distinguidos con este galardón desde que se instituyó; entre ellos, Lloyd Shapley, el gran amigo de Nash durante su primera época en Princeton, que lo obtuvo en 2012.

Tras ganar el Nobel de Economía en 1994, Nash recibió títulos honoríficos por todo el mundo.

### OTRA CUMBRE DE NASH: EL PREMIO ABEL

El premio Abel fue creado en el año 2002 para conmemorar el bicentenario del nacimiento del matemático noruego Niels Henrik Abel (1802-1829), que falleció muy joven y en medio de la pobreza. Se concede anualmente a los mejores matemáticos por el conjunto de su obra científica y su objetivo es aumentar el prestigio de las matemáticas, sobre todo entre la juventud. Patrocinado por la Academia Noruega de Ciencias y Letras, su jurado está compuesto por cinco matemáticos y corresponde al rey de Noruega la entrega de la placa conmemorativa, la medalla y el diploma al ganador o ganadores. El candidato puede ser designado por las academias de ciencias, universidades, organismos de investigación e instituciones públicas o privadas de todo el mundo, así como por algunas personalidades científicas. El veredicto se hace público en marzo y el premio se entrega en mayo. Su prestigio es tal que se equipara a la medalla Fields, de la que se diferencia en que no impone límites de edad a sus ganadores: así, Nash se quedó sin medalla Fields, pero ganó el premio Abel a los ochenta y seis años.



La Universidad de Oslo acoge anualmente la entrega de los premios Abel.

después de recibir el premio Abel, Nash y Alicia fallecieron en un accidente de tráfico en Nueva Jersey. El taxista que los trasladaba hizo un mal adelantamiento y colisionó con una barrera, lo que se cobró la vida del matrimonio. Él tenía ochenta y seis años, y ella, ochenta y dos. Este trágico e inesperado final conmocionó a la comunidad científica, a la que quedó el consuelo de que Nash había conseguido, finalmente, la fama y el reconocimiento que merecía.

El legado de Nash no solo es muy valioso para los trabajos de las generaciones posteriores de matemáticos, sino que resulta inmenso en diversas áreas: teoría de juegos, topología, ecuaciones diferenciales, etcétera. Lo cierto es que fue capaz de enfrentarse a los más grandes retos, venció a teoremas que parecían imposibles de probar y superó una enfermedad mental devastadora. Aunque su popularidad actual se deba, posiblemente, a factores externos a su obra como matemático, no es en absoluto inmerecida: incluso con una vida más convencional, Nash, por derecho propio, hubiera estado entre los genios matemáticos de la historia.



# Lecturas recomendadas


CARMONA, I., Y FILIO, E., *Ecuaciones diferenciales*, Reading (Massachusetts), Addison-Wesley, 2011.

CASAS, E., *Singularidades unidimensionales en una superficie algebraica*, Barcelona, Universidad de Barcelona, 2011.

CASTELLET, M., «De Hilbert a los problemas del milenio», Madrid, *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 2003.

GONZALO, J., *Variedades y geometría: un curso breve*, Madrid, Universidad Autónoma de Madrid, 2005.

GRACIÁN, E., *Von Neumann. La teoría de juegos: Piedra, papel, teorema*, Barcelona, RBA, 2013.

MILNOR, J., «Un Premio Nobel para John Nash: Una mente maravillosa», Madrid, *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 2002.

NASAR, S., *Una mente prodigiosa*, Barcelona, Mondadori, 2001.

REAL, J., MARÍN, P., Y GARCÍA, J., *Atractores para las ecuaciones de Navier Stokes bidimensionales*, Sevilla, Universidad de Sevilla, 2010.

ROMERO, S., MORENO, F., Y RODRÍGUEZ, M. I., *Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales*, Huelva, Universidad de Huelva, 2001.

RUFIÁN, A., RUIZ, G., Y OSUNA, R., *Métodos de optimización matemática. Manual para la resolución de problemas de optimización aplicados a la toma de decisiones empresariales*, Sevilla, Alvalena, 2011.

# Índice


álgebra 10, 30, 32
aplicación biyectiva 76, 81

banda o cinta de Moebius 77, 79

ceros no triviales 128, 141
congruencias 22
conjetura de Nash 142, 144, 145, 146

difeomorfismo 82, 84, 100
dilema del prisionero 9, 51
distancia euclídea 74, 76, 100

ecuaciones
  de Navier-Stokes 13, 139, 140, 141
  de tipo elíptico 121, 122, 123, 124
  de tipo hiperbólico 120
  de tipo parabólico 10, 13, 121, 122, 123
  diferenciales 11, 13, 85, 102, 103, 104, 105, 106, 108, 111, 114, 118, 122, 133, 139, 140, 152
  diofánticas 27
  en derivadas parciales 120, 121, 122, 123, 124, 125
embebimiento 87, 91, 94, 96, 97, 98, 100, 101, 102, 105, 114, 120
equilibrio de Nash 9, 51, 52, 53, 63, 113, 147, 148
espacio
  euclídeo 9, 72, 74, 76, 78, 84, 94, 96, 97, 98, 100, 101
  métrico 76
  topológico 33, 98, 99, 100
estrategias
  mixtas 46, 49, 52

función
  de ganancia 43, 47, 52
  de pagos 44, 62,
  de riesgo 64,
  diferenciable 101
  implícita 142
  reguladora 108
  zeta de Riemann 128, 141

geodésica 96, 97, 99
gradiente 103, 104, 121

hiperplano 145
hipótesis de Riemann 10, 13, 111, 127, 129, 133, 139, 141
homeomorfismo 100
homomorfismo 82, 83

inmersión 5, 9, 87, 94, 96, 97, 100, 101, 113
Instituto
  Clay 139, 140, 141
  Courant 118, 119, 135, 151
  de Estudios Avanzados 29, 30, 33, 35, 93, 117, 118, 133
  Tecnológico Carnegie 13, 23, 24, 25, 26, 34
  Tecnológico de Massachusetts 9, 55, 70, 72, 73, 84, 85, 93, 94, 109, 114, 116, 117, 134, 135, 137, 142
isometría 33,
isomorfismo 83

juego de Nash 36, 37, 39
juegos
  cooperativos 45, 49, 51, 53, 146,
  de negociación 13, 55, 60, 61, 62, 63, 64, 66, 67, 88
  de suma no nula 44
  de suma nula o suma cero 44, 47
  no cooperativos 13, 46, 50, 52, 113, 147

matriz de pagos 44, 47, 49
medalla Fields 11, 36, 37, 126, 127, 133, 142, 144, 151
MIT 9, 55, 70, 72, 73, 84, 85, 93, 94, 109, 114, 116, 117, 134, 135, 137, 141, 142

números
  enteros 22
  imaginarios 35
  primos 22, 23
  reales 34, 81, 82, 83

operador 106, 107, 108
optimización 108

pequeño teorema de Fermat 22
polinomio 34, 35, 84, 101
premio
  Abel 12, 36, 37, 118, 119, 126, 151, 152
  de Teoría John Von Neumann 12, 13, 41
  Leroy P. Steele 12, 13
  Nobel de Economía 12, 13, 20, 26, 65, 95, 115, 119, 126, 147, 149, 150, 151
problemas de Hilbert 27, 30, 122, 123, 124, 125, 139, 141

RAND 9, 13, 55, 58, 59, 60, 65, 66, 67, 69, 90, 109, 116
restricciones 27, 33, 108, 122

singularidades 13, 37, 79, 142, 143, 144, 145, 146
Sociedad Americana de Matemáticas 12, 135

teorema
  de De Giorgi-Nash-Moser 125
  de Fáry-Milnor 37
  de Milnor-Wolf 37
  de Nash 98, 99, 100, 101
  de Nash-Moser 10, 120
  de la bola peluda 37
  de regularidad 13, 124
  del minimax 47, 51, 53
  fundamental del álgebra 32, 34
  sobre variedades 13, 70, 84, 85
*teoría*
  *de juegos 8, 9, 10, 13, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 39, 40, 42, 45, 46, 47, 50, 51, 52, 64, 113, 147, 152*
  *de la negociación 13, 55, 60, 61, 62, 63, 64, 66, 67, 88*
*topología 10, 30, 32, 33, 36, 50, 78, 100, 102, 133, 152*
*toro 77, 79*

*Universidad*
  *Carnegie Mellon 24*
  *de Brandeis 142*
  *de Chicago 70, 133, 134*
  *de Harvard 26, 28, 30, 70*
  de Pisa 123, 125
  de Princeton 9, 11, 13, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 33, 34, 35, 36, 37, 39, 50, 57, 59, 65, 67, 69, 70, 72, 84, 85, 93, 117, 118, 138, 142, 146

variedades 69, 70, 72, 76, 77, 78, 81, 82, 84, 85, 87, 91, 94, 96, 98, 101, 102, 113, 120, 141, 143, 145
  algebraicas 78, 79, 84, 85, 113, 141
  riemannianas 96, 98, 100, 101, 102, 113